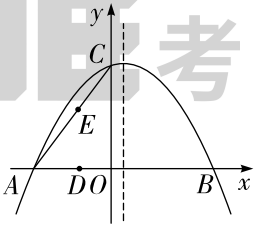
重难题型一　二次函数综合题

1. 如图,抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$ 与 x 轴交于 A,B 两点(点 A 在点 B 的左侧),与 y 轴交于点 C,动点 D 在线段 AO 上从点 A 出发以每秒 1 个单位的速度向点 O 运动,E 为线段 AC 上一动点,设点 D 的运动时间为 t.

(1)求 A,B,C 三点的坐标;

(2)若在点 D 运动的同时,动点 E 以相同速度从点 C 出发向点 A 运动,当直线 DE 将△AOC 分成面积比为 2∶3两部分时,求 t 的值;

(3)若 Q 是抛物线对称轴上一点,是否存在点 Q,使得 $EQ+AQ$ 的值最小?若存在,直接写出点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.



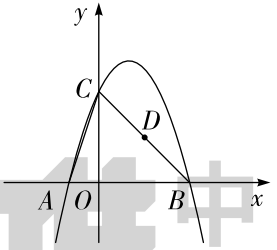
第 1 题图

2. 如图,抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$,B 两点,与 y 轴交于点 $C(0,3)$.

(1)求抛物线的解析式;

(2)D 是 BC 的中点,E 是抛物线上一点,当 $DE/\!/AC$ 时,求点 E 的坐标;

(3)点 F 在抛物线的对称轴上,点 G 在抛物线上,当以点 B,C,F,G 为顶点的四边形是平行四边形时,求出所有满足条件的点 G 的坐标.



第 2 题图

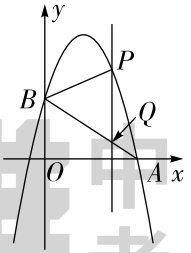
万唯中考

3. 如图,抛物线 $y=-\frac{4}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3,0)$,$B(0,2)$,连接 AB,P 是第一象限内抛物线上一动点.

(1)求抛物线的解析式;

(2)过点 P 作 x 轴的垂线,交 AB 于点 Q,当以点 B,P,Q 为顶点的三角形是直角三角形时,求出点 P 的坐标;

(3)点 C 与点 B 关于 x 轴对称,连接 AC,AP,PC,当点 P 运动到什么位置时,$\triangle ACP$ 的面积最大?求 $\triangle ACP$ 面积的最大值及此时点 P 的坐标.



第 3 题图

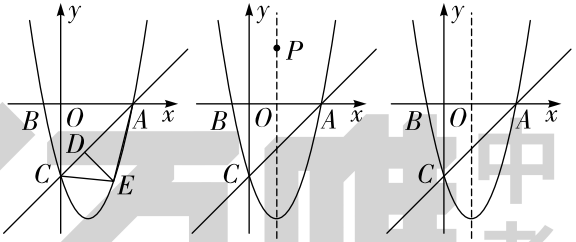
万唯中考

4. 在平面直角坐标系中,抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(4,0)$,$B(-1,0)$ 两点,与 y 轴交于点 C.

(1)求抛物线的解析式;

(2)如图①,E 为直线 AC 下方抛物线上一动点,过点 E 作 $ED\perp AC$ 于点 D,分别连接 EA,EC,当 $\triangle ACE$ 的面积最大时,求 ED 的长;

(3)如图②,若 P 为抛物线对称轴上一点,Q 为平面内一点,当以点 A,C,P,Q 为顶点的四边形是矩形时,请直接写出点 Q 的坐标.



图①　　图②

第 4 题图　　备用图

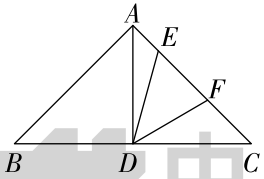
重难题型二　几何图形综合题

1. 如图,在△ABC 中,$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,D 为 BC 的中点,连接 AD,E 是线段 AC 上的动点(不与点 A,C 重合),在 DE 右侧作$\angle EDF=\angle B$,交直线 AC 于点 F,设 $CE=x$.

(1)当 $DF=2$,$EF=\frac{3}{2}$时,求 AE 的长;

(2)若 $AB=4$,设 $AF=y$,求 y 关于 x 的函数解析式;

(3)在(2)的条件下,若 $DE+CE=3$,求 AF 的长.



第 1 题图

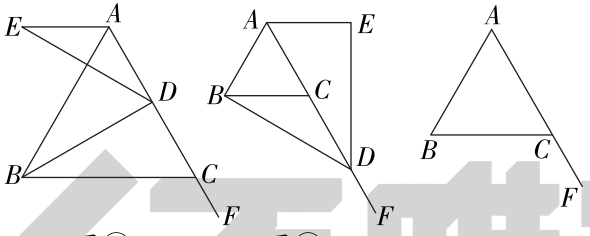
万唯中考

2. 如图,在等边△ABC 中,D 是射线 AC 上一个动点,连接 BD,将线段 BD 绕点 D 顺时针旋转 60°得到线段 DE,连接 AE.

(1)如图①,当点 D 运动至线段 AC 的中点时,请直接写出∠EAB 与∠EDB 的数量关系;

(2)如图②,当点 D 在线段 AC 的延长线上时,请判断线段 AE 与线段 BC 的位置关系,并说明理由;

(3)若$\frac{DE}{CD}=\sqrt{3}$,请直接写出∠AED 的度数.



图①　　图②　　备用图

第 2 题图

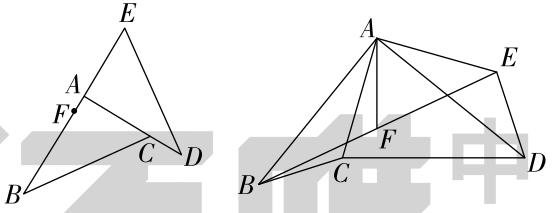
万唯中考

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB \neq AC$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 α 得到 $\triangle ADE$，连接 BE，CD，F 是 BE 的中点，连接 AF.

(1) 如图①，当 $\angle BAC = 90°$，$\alpha = 90°$ 时，线段 AF 与 CD 的数量关系为_____，位置关系为_____；

(2) 如图②，当 $\angle BAC$ 是锐角，$\alpha = 90°$ 时，(1) 中结论的位置关系是否成立？若成立，请写出证明过程，若不成立，请说明理由；

(3) 若 $\angle BAC = 60°$，$\angle ACB = 90°$，$AC = 1$，当 $\angle BAE = 120°$ 时，连接 CF，请直接写出线段 CF 的长.



图①　　图②

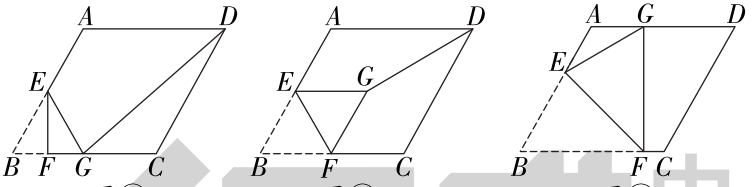
第 3 题图

4. 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，E，F 分别是边 AB，BC 上的动点，将 $\triangle BEF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle GEF$，连接 DG.

(1) 如图①，当点 G 落在 BC 边上，且 E 是 AB 的中点时，求 $\sin\angle CGD$ 的值；

(2) 如图②，当 E 是 AB 的中点时，求四边形 $AEGD$ 面积的最大值；

(3) 如图③，若 $BF=2\sqrt{3}$，当点 G 落在 AD 边上时，请直接写出 BE 的长.



图①　　图②　　图③

第 4 题图

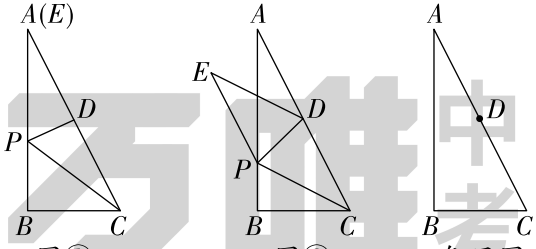
万唯中考

5. 在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$BC=4$，$AB=8$，D 是边 AC 的中点，P 是 AB 边上任意一点（点 P 不与点 A 重合），连接 PC，PD，将△PDC 沿直线 PD 折叠，点 C 的对应点为点 E.

（1）如图①，当点 E 与点 A 重合时，求线段 AP 的长；

（2）如图②，当点 E 在△ABC 外侧，四边形 $CDEP$ 是菱形时，求$\frac{PD}{AD}$的值；

（3）设△PDE 与△ABC 重叠部分的面积为 S_1，△PAC 的面积为 S_2，当 $S_1=\frac{1}{4}S_2$ 时，连接 AE，请直接写出 $\tan\angle AED$ 的值.



图①　　图②　　备用图

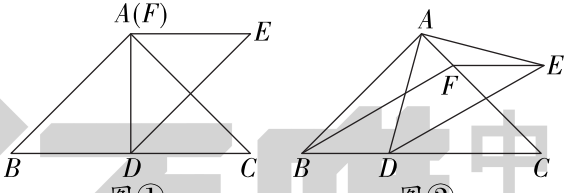
第 5 题图

6. 在 Rt△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点 D 在直线 BC 上，连接 AD，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 90°得到 AE，连接 DE，过点 E 作 $EF/\!/BC$，交直线 AC 于点 F.

(1) 如图①，当 D 为 BC 的中点时，点 F 与点 A 重合，请直接写出线段 CF 与 EF 的数量关系；

(2) 如图②，当点 D 在线段 BC 上时，请写出线段 BF，CF，CD 之间的数量关系，并说明理由；

(3) 当 $AB=2\sqrt{2}$，$BD=1$ 时，若 AD 与直线 BF 交于点 G，请直接写出线段 GF 的长.



图①　　图②

第 6 题图

参考答案及解析

重难题型一　二次函数综合题

1. 解：(1)在 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$ 中，令 $x=0$，得 $y=4$，

$\therefore C(0,4)$.

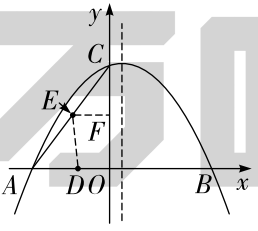
令 $y=0$，则 $-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4=0$，

解得 $x=-3$ 或 $x=4$.

$\because$ 点 A 在点 B 的左侧，

$\therefore A(-3,0)$，$B(4,0)$；

(2)如解图①，过点 E 作 $EF\perp OC$ 于点 F，连接 DE，



第 1 题解图①

$\therefore EF/\!/OA$，

$\therefore \frac{CF}{CO}=\frac{EF}{AO}=\frac{CE}{CA}$.

由题意知 $AD=CE=t$，

$\because A(-3,0)$，$C(0,4)$，

$\therefore OA=3$，$OC=4$，$AC=5$，

$\therefore \frac{CF}{4}=\frac{EF}{3}=\frac{t}{5}$，

$\therefore CF=\frac{4}{5}t$，$EF=\frac{3}{5}t$，

$\therefore OF=4-\frac{4}{5}t.$

$\because S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC=\frac{1}{2}\times3\times4=6,$

当直线 DE 将 $\triangle AOC$ 分成面积比为 $2:3$ 两部分时,分两种情况讨论:

①当 $S_{\triangle AED}=\frac{2}{5}S_{\triangle AOC}=\frac{12}{5}$ 时,

则 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot OF=\frac{1}{2}t\cdot(4-\frac{4}{5}t)=2t-\frac{2}{5}t^2=\frac{12}{5},$

化简得 $t^2-5t+6=0,$

解得 $t=2$ 或 $t=3$;

②当 $S_{\triangle AED}=\frac{3}{5}S_{\triangle AOC}=\frac{18}{5}$ 时,

则 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot OF=\frac{1}{2}t\cdot(4-\frac{4}{5}t)=2t-\frac{2}{5}t^2=\frac{18}{5},$

化简得 $t^2-5t+9=0,b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times9=-9<0,$

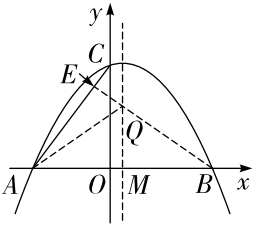
此方程无实数根.

综上所述,t 的值为 2 或 3;

(3)存在,点 Q 的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{21}{8})$.

【解法提示】如解图②,设抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$ 的对称轴直线 $x=\frac{1}{2}$ 与 x 轴交于点 M,过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E,交对称轴于点 Q,连接 AQ,$\because$ 点 A 与点 B 关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,$\therefore EQ+AQ=EQ+BQ=BE$,当且仅当 $BE\perp AC$ 时,BE 取得最小值,即 $EQ+AQ$ 最小. $\because \angle CAO+\angle ACO=90°$, $\angle CAO+\angle MBQ=90°$,

$\therefore \angle MBQ=\angle ACO$，$\therefore \tan\angle MBQ=\tan\angle ACO=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore \dfrac{QM}{BM}=\dfrac{3}{4}$. $\because BM=OB-OM=4-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$，$\therefore \dfrac{QM}{\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{4}$，解得 $QM=\dfrac{21}{8}$，$\therefore$ 点 Q 的坐标为$(\dfrac{1}{2},\dfrac{21}{8})$.



第 1 题解图②

2. 解：(1)把点 $A(-1,0)$，$C(0,3)$代入 $y=-x^2+bx+c$，

得$\begin{cases}-1-b+c=0\\c=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$；

(2)令$-x^2+2x+3=0$，

解得 $x=3$ 或 $x=-1$，$\therefore B(3,0)$.

$\because D$ 是 BC 的中点，$\therefore D(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$.

设 AC 所在直线的解析式为 $y=mx+n(m\neq0)$，

由点 $A(-1,0)$，$C(0,3)$可知 AC 所在直线的解析式为 $y=3x+3$.

设 DE 所在直线的解析式为 $y=px+q(p\neq0)$，

$\because DE/\!/AC$，$\therefore p=3$，

即 DE 所在直线的解析式为 $y=3x+q$.

将点 $D(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 代入 $y=3x+q$ 中,得 $q=-3$,

$\therefore$ DE 所在直线的解析式为 $y=3x-3$.

联立 $\begin{cases}y=-x^2+2x+3\\y=3x-3\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=-3\\y=-12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-3,-12)$ 或 $(2,3)$;

(3)抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{2}{2\times(-1)}=1$,

设 $F(1,s)$,$G(r,-r^2+2r+3)$,

①当 BC 为平行四边形的边时,点 C 向右平移 3 个单位长度,向下平移 3 个单位长度得到点 B,同样点 $G(F)$ 向右平移 3 个单位长度,向下平移 3 个单位长度得到点 $F(G)$,

$\therefore$ $r\pm3=1$,解得 $r=-2$ 或 $r=4$.

当 $r=-2$ 时,$-r^2+2r+3=-5$,

当 $r=4$ 时,$-r^2+2r+3=-5$,

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $(-2,-5)$ 或 $(4,-5)$;

②当 BC 为平行四边形的对角线时,BC 与 FG 互相平分,

$\therefore$ $\frac{1}{2}\times(3+0)=\frac{1}{2}(r+1)$,解得 $r=2$.

当 $r=2$ 时,$-r^2+2r+3=3$,$\therefore$ 点 G 的坐标为 $(2,3)$.

综上所述,所有满足条件的点 G 的坐标为 $(-2,-5)$ 或 $(4,-5)$ 或 $(2,3)$.

3. 解:(1)把点 $A(3,0)$,$B(0,2)$ 代入 $y=-\frac{4}{3}x^2+bx+c$,

得 $\begin{cases}-\frac{4}{3}\times3^2+3b+c=0\\c=2\end{cases}$,解得 $\begin{cases}b=\frac{10}{3}\\c=2\end{cases}$,

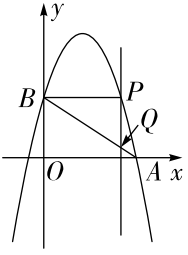
$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{10}{3}x+2$;

(2)设 $P(m,-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2)(0<m<3)$,

$\because$ 以点 B,P,Q 为顶点的三角形是直角三角形,$\angle BQP\neq 90°$,

$\therefore$ $\angle BPQ=90°$或$\angle PBQ=90°$.

①当$\angle BPQ=90°$时,则有 $BP\perp PQ$,如解图①,



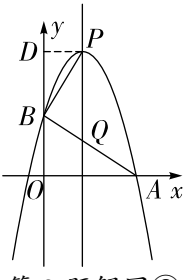
第 3 题解图①

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 2,

$\therefore$ $-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2=2$,解得 $m=0$(舍去)或 $m=\frac{5}{2}$,

$\therefore$ $P(\frac{5}{2},2)$;

②当$\angle PBQ=90°$时,如解图②,过点 P 作 $PD\perp y$ 轴于点 D,



第 3 题解图②

则$\angle PBD+\angle BPD=90°$,$PD=m$,$BD=-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2-2=-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m$,

$\because \angle PBQ=90°$,

$\therefore \angle PBD+\angle OBA=90°$,

$\therefore \angle OBA=\angle BPD$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PDB \backsim \mathrm{Rt}\triangle BOA$,

$\therefore \dfrac{PD}{BO}=\dfrac{DB}{OA}$,

$\therefore \dfrac{m}{2}=\dfrac{-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m}{3}$,

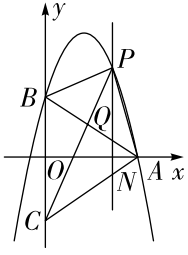
解得 $m=0$(舍去)或 $m=\dfrac{11}{8}$,

将 $m=\dfrac{11}{8}$代入 $y=-\dfrac{4}{3}m^2+\dfrac{10}{3}m+2$,解得 $y=\dfrac{65}{16}$,

$\therefore P(\dfrac{11}{8},\dfrac{65}{16})$.

综上所述,当以点 P,Q,B 为顶点的三角形是直角三角形时,点 P 的坐标为$(\dfrac{5}{2},2)$或$(\dfrac{11}{8},\dfrac{65}{16})$;

(3)如解图③,过点 P 作 $PN\perp x$ 轴,交 AC 于点 N,



第 3 题解图③

$\because B(0,2)$,点 C 与点 B 关于 x 轴对称,

$\therefore C(0,-2)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$,

把点 $A(3,0)$,$C(0,-2)$代入,

得$\begin{cases}3k_1+b_1=0\\b_1=-2\end{cases}$,解得$\begin{cases}k_1=\dfrac{2}{3}\\b_1=-2\end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=\dfrac{2}{3}x-2$,

设 $P(n,-\dfrac{4}{3}n^2+\dfrac{10}{3}n+2)$,则 $N(n,\dfrac{2}{3}n-2)$,

则 $PN=-\dfrac{4}{3}n^2+\dfrac{10}{3}n+2-(\dfrac{2}{3}n-2)=-\dfrac{4}{3}n^2+\dfrac{8}{3}n+4$,

则 $S_{\triangle ACP}=\dfrac{1}{2}PN\cdot OA=\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{4}{3}n^2+\dfrac{8}{3}n+4)\times 3=-2n^2+4n+6=$

$-2(n-1)^2+8$,

$\because -2<0,0<n<3$,

$\therefore$ 当 $n=1$ 时,$\triangle ACP$ 的面积最大,最大值为 8.

将 $n=1$ 代入 $y=-\dfrac{4}{3}n^2+\dfrac{10}{3}n+2$,得 $y=4$,

$\therefore P(1,4)$,

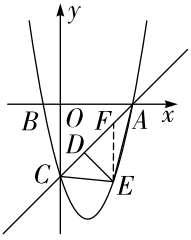
$\therefore \triangle ACP$ 面积的最大值为 8,此时点 P 的坐标为$(1,4)$.

4. 解:(1)将点 $A(4,0)$,$B(-1,0)$分别代入 $y=x^2+bx+c$,

得$\begin{cases}16+4b+c=0\\1-b+c=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}b=-3\\c=-4\end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-3x-4$;

(2)如解图①,过点 E 作 $EF\perp x$ 轴交直线 AC 于点 F,



第 4 题解图①

$\because$ 抛物线 $y=x^2-3x-4$ 与 y 轴交于点 C,

$\therefore C(0,-4)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+t(k\neq0)$,

将点 $C(0,-4)$,$A(4,0)$分别代入,

得$\begin{cases}t=-4\\4k+t=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}k=1\\t=-4\end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=x-4$.

设 $E(m,m^2-3m-4)$,则 $F(m,m-4)$,

$\therefore EF=m-4-(m^2-3m-4)=-m^2+4m$.

$\because A(4,0)$,$C(0,-4)$,

$\therefore \triangle AOC$ 为等腰直角三角形,且$\angle ACO=45°$.

$\because EF\perp x$ 轴,$\therefore EF/\!/CO$,

$\therefore \angle EFD=\angle ACO=45°$.

$\because ED\perp AC$,

$\therefore ED=\frac{\sqrt{2}}{2}EF=\frac{\sqrt{2}}{2}(-m^2+4m)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(m-2)^2+2\sqrt{2}$.

$\because$ 要使$\triangle ACE$ 的面积最大,且 AC 长度一定,

$\therefore$ 当 ED 的长度最大时,$\triangle ACE$ 的面积最大.

$\because -\frac{\sqrt{2}}{2}<0$,$0<m<3$,

$\therefore$ 当 $m=2$ 时,ED 有最大值,$ED_{最大}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 当$\triangle ACE$的面积最大时,ED的长为$2\sqrt{2}$;

(3)$(\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{31}}{2}-2)$或$(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{31}}{2}-2)$或$(\frac{11}{2},-\frac{3}{2})$或$(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$.

【解法提示】抛物线$y=x^2-3x-4$的对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$,如解图②,当$\angle APC=90°$时,即当点P在P_1,P_2处时,设$P(\frac{3}{2},n)$,当点P在P_1处时,过点P_1作$M_1N_1/\!/x$轴,交y轴于点M_1,作$AN_1\perp M_1N_1$于点N_1,则$\triangle CM_1P_1\backsim\triangle P_1N_1A$,$\therefore\frac{CM_1}{P_1N_1}=\frac{P_1M_1}{AN_1}$,

$\therefore\frac{n+4}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{n}$,解得$n=\frac{\sqrt{31}}{2}-2$或$-\frac{\sqrt{31}}{2}-2$(舍去),$\therefore P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{31}}{2}-2)$,

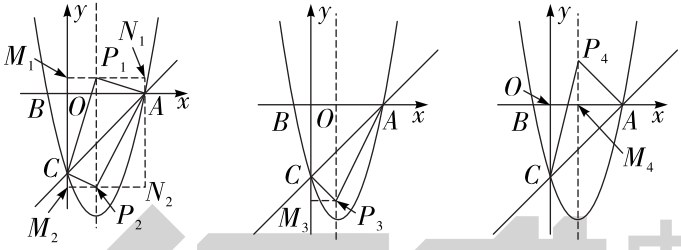
$\therefore Q(\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{31}}{2}-2)$;当点$P$在$P_2$处时,同理可得$\triangle CM_2P_2\backsim$

$\triangle P_2N_2A$,$\therefore\frac{CM_2}{P_2N_2}=\frac{P_2M_2}{AN_2}$,$\therefore\frac{-4-n}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{-n}$,解得$n=\frac{\sqrt{31}}{2}-2$(舍去)

或$-\frac{\sqrt{31}}{2}-2$,$\therefore P(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{31}}{2}-2)$,$\therefore Q(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{31}}{2}-2)$;如解图③,当$\angle ACP=90°$时,即点$P$在点$P_3$处时,过点$P_3$作$P_3M_3\perp y$轴于点$M_3$,$\therefore\triangle AOC\backsim\triangle CM_3P_3$,$\therefore\frac{AO}{CM_3}=\frac{OC}{M_3P_3}$,$\therefore\frac{4}{CM_3}=\frac{4}{\frac{3}{2}}$,解

得$CM_3=\frac{3}{2}$,$\therefore P(\frac{3}{2},-\frac{11}{2})$,$\therefore Q(\frac{11}{2},-\frac{3}{2})$;如解图④,当$\angle CAP=90°$时,即点$P$在点$P_4$处时,过点$P_4$作$P_4M_4\perp x$轴于

点 M_4，$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle P_4M_4A$，$\therefore \dfrac{AO}{P_4M_4}=\dfrac{OC}{M_4A}$，$\therefore \dfrac{4}{P_4M_4}=\dfrac{4}{\frac{5}{2}}$，解得 $P_4M_4=\dfrac{5}{2}$，$\therefore P(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$，$\therefore Q(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2})$. 综上所述，点 Q 的坐标为 $(\dfrac{5}{2},-\dfrac{\sqrt{31}}{2}-2)$ 或 $(\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{31}}{2}-2)$ 或 $(\dfrac{11}{2},-\dfrac{3}{2})$ 或 $(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2})$.



图②　　图③　　图④

第 4 题解图

重难题型二　几何图形综合题

1. **解：**(1) $\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C=45°$.

$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore AD\perp BC$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle ADC=90°$，$\angle DAC=45°$，

$\therefore \angle DAF=\angle EDF=45°$.

$\because \angle DFA=\angle EFD$，

$\therefore \triangle AFD \backsim \triangle DFE$，

$\therefore \dfrac{DF}{EF}=\dfrac{AF}{DF}$.

$\because DF=2$，$EF=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore AF=\frac{8}{3}$,

$\therefore AE=AF-EF=\frac{8}{3}-\frac{3}{2}=\frac{7}{6}$;

(2)由(1)得$\angle C=\angle DAC=\angle EDF=45°$,

$\because \angle DEC=\angle DAC+\angle ADE=45°+\angle ADE$,

$\angle ADF=\angle EDF+\angle ADE=45°+\angle ADE$,

$\therefore \angle DEC=\angle ADF$,

$\therefore \triangle DEC\backsim\triangle FDA$,

$\therefore \frac{CE}{AD}=\frac{CD}{AF}$.

$\because AB=4$,

$\therefore AC=4$,

$\therefore AD=CD=\frac{\sqrt{2}}{2}\times4=2\sqrt{2}$,

$\therefore xy=8$,

$\therefore y=\frac{8}{x}(0<x<4)$;

(3)$\because \angle EDF=\angle C=45°$, $\angle DEF=\angle CED$,

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle CED$,

$\therefore \frac{DE}{CE}=\frac{EF}{DE}$.

$\because DE+CE=3$,

$\therefore DE=3-x$,

$\therefore (3-x)^2=(x+y-4)x$,

$\therefore 9-6x+x^2=x^2+xy-4x$.

由(2)得 $y=\frac{8}{x}$. $\therefore xy=8$,

$\therefore 2x=1$,

万唯中考

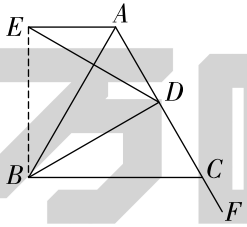
$\therefore x=\frac{1}{2}$,

$\therefore y=16$,

$\therefore AF=16$.

2. **解:**(1) $\angle EAB=\angle EDB$;

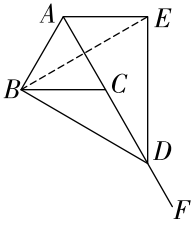
【解法提示】如解图①,连接 BE,$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,D 是 AC 的中点,$\therefore \angle ACB=60°$,$\angle BDA=90°$,由旋转的性质可知 $DB=DE$,$\angle EDB=60°$,$\therefore \triangle DEB$ 是等边三角形,$\therefore BE=BD$,$\angle EBD=\angle ABC$,$\therefore \angle EBD-\angle ABD=\angle ABC-\angle ABD$,即 $\angle EBA=\angle DBC$,$\because AB=BC$,$\therefore \triangle BAE\cong\triangle BCD$(SAS),$\therefore \angle EAB=\angle DCB=60°$,$\therefore \angle EAB=\angle EDB$.



第 2 题解图①

(2) $AE/\!/BC$,理由如下:

如解图②,连接 BE,



第 2 题解图②

由旋转的性质可知 $DB=DE$,$\angle BDE=60°$,

$\therefore \triangle BED$ 是等边三角形,$\therefore BE=BD$,$\angle EBD=60°$.

$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore BA=BC$，$\angle ABC=60°$，$\angle BCD=120°$，

$\therefore$ $\angle ABC=\angle EBD$，

$\therefore$ $\angle ABC-\angle EBC=\angle EBD-\angle EBC$，即 $\angle ABE=\angle CBD$.

$\because$ 在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBD$ 中，$\begin{cases} BA=BC \\ \angle ABE=\angle CBD \\ BE=BD \end{cases}$，

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle CBD$(SAS)，

$\therefore$ $\angle BAE=\angle BCD=120°$.

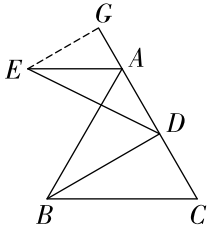
$\because$ $\angle BAE+\angle ABC=120°+60°=180°$，

$\therefore AE/\!/BC$；

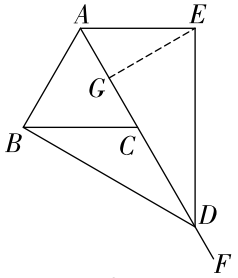
(3)30°或 90°.

【解法提示】由(2)可知 $\triangle ABE\cong\triangle CBD$，$\therefore AE=CD$，$\angle BAE=\angle BCD$，$\because \dfrac{DE}{CD}=\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{DE}{AE}=\sqrt{3}$，设 $AE=2$，则 $DE=2\sqrt{3}$，如解图③，过点 E 作 $EG\perp DA$ 交 DA 的延长线于点 G，$\because$ $\angle BAE=\angle BCD=60°$，$\therefore$ $\angle EAD=120°$，$\angle EAG=60°$，$\because$ 在 Rt$\triangle AEG$ 中，$\sin\angle EAG=\dfrac{EG}{AE}$，$\therefore$ $EG=AE\cdot\sin\angle EAG=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$\because$ 在 Rt$\triangle DEG$ 中，$\sin\angle EDG=\dfrac{EG}{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\angle EDG=30°$，$\therefore$ $\angle AED=180°-\angle EAD-\angle EDA=30°$；如解图④，过点 E 作 $EG\perp DA$ 于点 G，$\because$ $\angle BAE=\angle BCD=120°$，$\therefore$ $\angle EAD=60°$，$\because$ 在 Rt$\triangle AEG$ 中，$\sin\angle EAG=\dfrac{EG}{AE}$，$\therefore$ $EG=AE\cdot\sin\angle EAG=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$\because$ 在 Rt$\triangle DEG$ 中，$\sin\angle EDG=\dfrac{EG}{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\angle EDG=30°$，$\therefore$ $\angle AED=180°-\angle EAD-\angle EDA=90°$. 综上所述，$\angle AED$

的度数为 30°或 90°.



图③

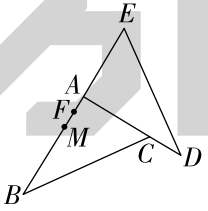


图④

第 2 题解图

3. **解:**(1) $CD=2AF$, $CD\perp AF$;

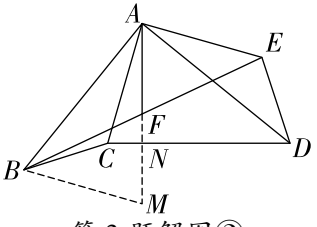
【解法提示】如解图①,在 AF 的延长线上取点 M,使 $MF=AF$,由题意可知点 B,A,E 在同一条直线上,$CD\perp AF$,$\because BF=EF$,$MF=AF$,$\therefore BM=AE$,$\because AB=AD$,$AC=AE$,$\therefore CD=AM=2AF$.



第 3 题解图①

(2)(1)中结论的位置关系仍然成立,

证明:如解图②,延长 AF 到点 M,使 $MF=AF$,交 CD 于点 N,连接 BM,



第 3 题解图②

$\because$ 在$\triangle MFB$和$\triangle AFE$中，$\begin{cases} BF=EF \\ \angle MFB=\angle AFE, \\ MF=AF \end{cases}$

$\therefore \triangle MFB \cong \triangle AFE$(SAS)，

$\therefore MB=AE, \angle M=\angle MAE$，

$\therefore BM /\!/ AE$，

$\therefore \angle ABM+\angle BAE=180°$.

由题意可知$AB=AD, AC=AE, \angle BAD=\angle CAE=90°$，

$\therefore MB=AC$.

$\because \angle BAE+\angle DAC=\angle BAD+\angle DAE+\angle CAD=180°$，

$\therefore \angle ABM=\angle DAC$.

$\because$ 在$\triangle ABM$和$\triangle DAC$中，$\begin{cases} MB=CA \\ \angle ABM=\angle DAC, \\ AB=DA \end{cases}$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle DAC$(SAS)，

$\therefore DC=AM=2AF, \angle BAM=\angle ADC$.

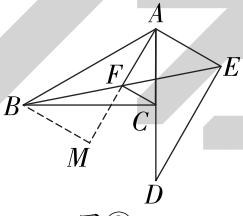
$\because \angle ADC+\angle DAN=\angle BAM+\angle DAN=\angle BAD=90°$，

$\therefore \angle AND=90°, \therefore CD \perp AF$；

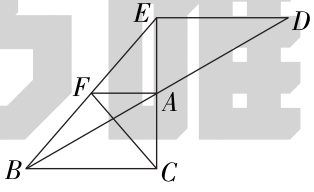
(3)线段CF的长为$\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{7}}{2}$.

【解法提示】①如解图③，在AF的延长线上取点M，使$MF=AF$，连接BM，则同理(2)可证$\triangle MFB \cong \triangle AFE$，$\therefore MB=AE=AC=1$，$BM /\!/ AE$，$\therefore \angle ABM=180°-\angle BAE=60°$，$\because$ 在$\triangle ABM$和$\triangle BAC$中，$\begin{cases} AB=BA \\ \angle ABM=\angle BAC, \\ BM=AC \end{cases}$ $\therefore \triangle ABM \cong \triangle BAC$(SAS)，$\therefore AM=BC$，$\angle M=\angle ACB=90°$，$\therefore \angle FAE=\angle M=90°$，由题意可知$\angle DAE=\angle BAC=60°$，$\therefore \angle FAC=30°$，在Rt$\triangle ABC$中，$AC=1$，$\angle BAC=60°$，$\therefore BC=\sqrt{3}$，$\therefore AF=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，在$\triangle ACF$

中，$\because \frac{AF}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$，$\therefore \angle AFC=90°$，$\therefore CF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$；②如解图④，$\because \angle BAE=120°$，$\angle BAC=60°$，$\therefore \angle BAE+\angle BAC=180°$，$\therefore$ 点 C,A,E 在同一条直线上，由题意得 $AC=AE$，即 A 是 EC 的中点，$\because F$ 是 BE 的中点，$\therefore AF$ 是 $\triangle EBC$ 的中位线，$\therefore AF/\!/BC$，$AF=\frac{1}{2}BC$，$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=1$，$\angle BAC=60°$，$\therefore BC=\sqrt{3}$，$\angle FAC=90°$，$\therefore AF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle FAC$ 中，根据勾股定理，得 $CF=\sqrt{AF^2+AC^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 综上所述，线段 CF 的长为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{7}}{2}$.



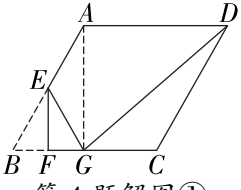
图③



图④

第 3 题解图

4. 解：(1) 如解图①，连接 AG，



第 4 题解图①

$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore AE=BE$.

由折叠的性质可知 $BE=GE$，

$\therefore AE=BE=GE.$

$\because \angle B=60°,$

$\therefore \angle AGB=90°.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD/\!/BC,$

$\therefore \angle DAG=90°, \angle ADG=\angle CGD.$

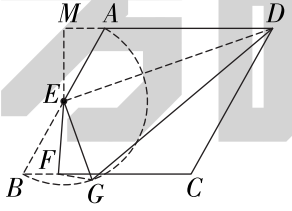
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中,$\because \angle B=60°, AB=4,$

$\therefore AG=AB\cdot\sin 60°=2\sqrt{3}.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADG$ 中,$DG=\sqrt{AD^2+AG^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7},$

$\therefore \sin\angle CGD=\sin\angle ADG=\dfrac{AG}{DG}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7};$

(2)如解图②,以点 E 为圆心,BE 长为半径作半圆,连接 DE,过点 E 作 $EM\perp DA$ 交 DA 的延长线于点 M,



第 4 题解图②

由题意可得,点 G 的运动轨迹为 $\overset{\frown}{AB}$.

$\because S_{四边形AEGD}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle EGD}$,且 $S_{\triangle AED}$ 为定值,

$\therefore$ 当 $EG\perp DE$ 时,$S_{\triangle EGD}$ 取得最大值,

即 $S_{四边形AEGD}$ 的取得最大值.

$\because \angle AME=90°,$

$\therefore \angle AEM=90°-60°=30°.$

$\because AE=\dfrac{1}{2}AB=2,$

$\therefore AM=\dfrac{1}{2}AE=1, ME=\sqrt{3},$

$\therefore MD=AM+AD=5$.

在 Rt$\triangle DME$ 中,$DE=\sqrt{MD^2+ME^2}=2\sqrt{7}$,

$\therefore S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot ME=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

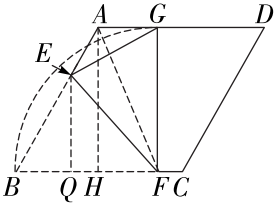
$\because EG=EB=2$,

$\therefore S_{四边形AEGD}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle EGD}=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{7}=2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$,

$\therefore$ 四边形 $AEGD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$;

(3)BE 的长为 $6-2\sqrt{3}$.

【解法提示】$\because BF$ 长为定值,$\therefore$ 如解图③,以点 F 为圆心,BF 长为半径作圆,交 AD 于点 G,过点 E 作 $EQ\perp BC$ 于点 Q,过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H,连接 AF. $\because AB=4$,$\angle B=60°$,$AH\perp BC$,$\therefore \angle BAH=30°$,$\therefore BH=\frac{1}{2}AB=2$,$AH=\sqrt{3}BH=2\sqrt{3}$. 由折叠的性质可知 $BF=FG=2\sqrt{3}$,$\therefore AH=FG$. $\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle HAF=\angle GFA$,$\because AF=FA$,$\therefore \triangle HAF\cong\triangle GFA$,$\therefore \angle AGF=90°$,$\therefore \angle BFG=90°$. 由折叠的性质可知 $\angle BFE=\angle GFE=45°$,$\because EQ\perp BC$,$\angle B=60°$,$\angle EFQ=45°$,$\therefore \angle BEQ=30°$,$\angle EFQ=\angle FEQ=45°$,$\therefore EQ=\sqrt{3}BQ$,$BE=2BQ$,$EQ=QF$. $\because BF=2\sqrt{3}=BQ+\sqrt{3}BQ$,解得 $BQ=3-\sqrt{3}$,$\therefore BE=2BQ=6-2\sqrt{3}$.



第 4 题解图③

5. 解:(1)$\because \triangle PDC$ 沿直线 PD 折叠,点 C 的对应点为点 E,

$\therefore$ 由折叠的性质得 $PD\perp AC$,

$\therefore \angle PDA=90°$.

$\because \angle B=90°, BC=4, AB=8$,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{5}$.

$\because D$ 是边 AC 的中点,

$\therefore AD=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$.

$\because$ 在 Rt△ABC 中, $\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore$ 在 Rt△ADP 中, $\cos A=\frac{AD}{AP}$, $\therefore AP=5$.

$\therefore$ 线段 AP 的长为 5;

(2) $\because$ 四边形 $CDEP$ 是菱形, D 是边 AC 的中点,

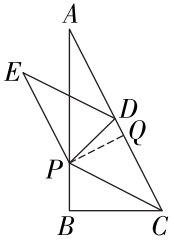
$\therefore CP=CD=AD=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$.

$\because$ 在 Rt△BCP 中, $\angle B=90°, BC=4$,

$\therefore BP=\sqrt{CP^2-BC^2}=2$,

$\therefore AP=AB-BP=8-2=6$.

如解图①,过点 P 作 $PQ\perp AC$ 于点 Q,



第 5 题解图①

$\therefore$ 在 Rt△AQP 中, $AQ=AP\cdot\cos A=6\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,

$QP=\sqrt{AP^2-AQ^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore DQ=AQ-AD=\frac{12\sqrt{5}}{5}-2\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle PDQ$ 中,$PD=\sqrt{QP^2+DQ^2}=2\sqrt{2}$,

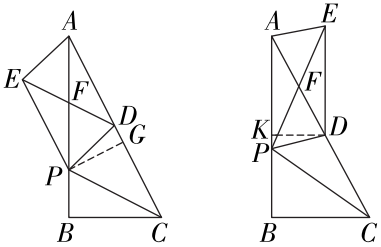
$\therefore \frac{PD}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

$\therefore \frac{PD}{AD}$的值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$;

(3)3 或$\sqrt{5}+2$.

【解法提示】①如解图②,当点 C,E 位于 AB 异侧时,设 DE 交 AB 于点 F,过点 P 作 $PG\perp AC$ 于点 G. $\because D$ 是边 AC 的中点,$\therefore S_{\triangle APD}=S_{\triangle CPD}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAC}$. $\because \triangle PDE$ 与$\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 S_1,$\triangle PAC$ 的面积为 S_2,$S_1=\frac{1}{4}S_2$,$\therefore S_{\triangle PFD}=\frac{1}{4}S_{\triangle PAC}$,$\therefore S_{\triangle PFD}=\frac{1}{2}S_{\triangle APD}$,$\therefore F$ 是 AP 的中点. 由折叠的性质得 $S_{\triangle EPD}=S_{\triangle CPD}$,$\therefore S_{\triangle EPD}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAC}$,$\therefore S_{\triangle PFD}=\frac{1}{2}S_{\triangle EPD}$,$\therefore F$ 是 DE 的中点,$\therefore$ 四边形 $AEPD$ 是平行四边形,$\therefore EP=AD=2\sqrt{5}$,$\angle AED=\angle PDE$. 由折叠的性质得 $CP=EP=2\sqrt{5}$,$\angle PDC=\angle PDE$,$\therefore \angle AED=\angle PDC$,$\therefore BP=\sqrt{CP^2-BC^2}=2$,$\therefore AP=AB-BP=6$,同理(2)得 $GP=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,$DG=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\therefore \tan\angle AED=\tan\angle PDG=\frac{GP}{DG}=3$;②如解图③,当点 C,E 位于 AB 同侧时,设 PE 交 AC 于点 F,过点 D 作 $DK\perp AB$ 于点 K,$\because \angle ABC=90°$,$\therefore KD/\!/BC$,$\because D$ 是边 AC 的中点,$\therefore DK$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore DK=\frac{1}{2}BC=2$,$AK=\frac{1}{2}AB=4$,同理①得四边形 $AEDP$ 是平行四边形,$\therefore CD=ED=AP=$

$2\sqrt{5}$，$\angle AED=\angle APD$，$\therefore PK=AP-AK=2\sqrt{5}-4$，$\therefore \tan\angle AED=\tan\angle APD=\dfrac{DK}{PK}=\sqrt{5}+2$. 综上所述，$\tan\angle AED$ 的值为 3 或 $\sqrt{5}+2$.

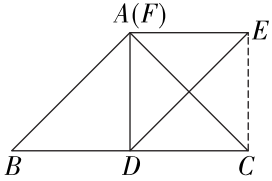


图②　　图③

第 5 题解图

6. 解：(1) $CF=\sqrt{2}EF$；

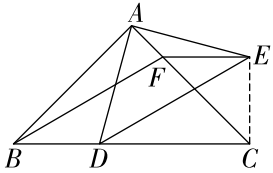
【解法提示】如解图①，连接 CE，$\because \angle BAC=\angle DAE=90°$，$\therefore \angle BAD=\angle CAE$，$\because$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$\begin{cases}AB=AC\\ \angle BAD=\angle CAE\\ AD=AE\end{cases}$，$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS)，$\therefore \angle ACE=\angle B$，$\because AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$\therefore \angle B=\angle ACB=45°$，$\therefore \angle ACE=45°$，$\because EF/\!/BC$，点 F 与点 A 重合，$\therefore \angle EAC=\angle ACB=45°$，$\therefore \angle AEC=90°$，$\because$ 在 Rt$\triangle CEF$ 中，$\cos\angle CFE=\dfrac{EF}{CF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore CF=\sqrt{2}EF$.



第 6 题解图①

(2) $\dfrac{1}{2}CF^2+CD^2=BF^2$，理由如下：

如解图②,连接 CE,



第 6 题解图②

由(1)得 $\angle ACE=\angle EFC=45°$,

$\therefore \angle DCE=\angle FEC=90°$,

$\therefore CE^2+CD^2=DE^2, EF=EC$.

同理(1)可证 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$,

$\therefore BD=CE, \therefore BD=EF$.

$\because EF/\!/BD$, $\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$\therefore BF=DE, \therefore CE^2+CD^2=BF^2$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中, $\cos\angle ECF=\dfrac{CE}{CF}$,

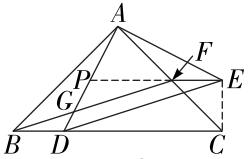
$\therefore CE=CF\cdot\cos\angle ECF=CF\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CF$,

$\therefore \dfrac{1}{2}CF^2+CD^2=BF^2$;

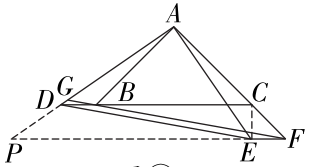
(3) $\dfrac{3}{5}\sqrt{10}$ 或 $\dfrac{15}{13}\sqrt{26}$.

【解法提示】$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2\sqrt{2}$, $\angle BAC=90°$, $\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=4$. 如解图③,当点 D 在点 B 右侧时,连接 CE,延长 EF 交 AD 于点 P,由(2)可知 $\angle DCE=\angle FEC=90°$, $BF=DE, BD=CE=EF$, $\therefore EF=CE=BD=1$, $\because CD=BC-BD=4-1=3$, $\therefore DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=\sqrt{10}$, $\therefore BF=\sqrt{10}$, $\because CF=$

$\sqrt{CE^2+EF^2}=\sqrt{2}$，$\therefore AF=AC-CF=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{2}$，$\because EF/\!/BC$，$\therefore \triangle APF\backsim\triangle ADC$，$\therefore \dfrac{PF}{DC}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PF=\dfrac{3}{2}$，$\because EF/\!/BC$，$\therefore \angle GPF=\angle GDB$，$\angle GFP=\angle GBD$，$\therefore \triangle PGF\backsim\triangle DGB$，$\therefore \dfrac{GF}{GB}=\dfrac{PF}{DB}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore GF=\dfrac{3}{5}BF=\dfrac{3}{5}\sqrt{10}$；如解图④，当点 D 在点 B 左侧时，连接 CE，延长 FE 与 AD 的延长线交于点 P，同理可得 $CE=BD=1$，$\angle ACE=\angle ABD$，$\because \angle ABC=45°$，$\therefore \angle ABD=135°$，$\therefore \angle ACE=135°$，$\therefore \angle ECF=45°$，$\because EF/\!/BC$，$\therefore \angle AFP=\angle ACB=45°$，$\therefore \angle ECF=\angle AFP$，$\therefore \angle CEF=90°$，$\therefore EF=CE=1$，$\therefore CF=\sqrt{EF^2+CE^2}=\sqrt{2}$，$\therefore AF=AC+CF=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{AC}{AF}=\dfrac{2}{3}$，$\because EF/\!/BC$，$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle APF$，$\therefore \dfrac{DC}{PF}=\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{2}{3}$，$\because DC=BD+BC=1+4=5$，$\therefore PF=\dfrac{15}{2}$，$\because EF/\!/BC$，$\therefore \triangle GDB\backsim\triangle GPF$，$\therefore \dfrac{GB}{GF}=\dfrac{DB}{PF}=\dfrac{2}{15}$，$\because EF/\!/BC$，$\therefore \angle DCE=\angle CEF=90°$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle DCE$ 中，$DE=\sqrt{DC^2+CE^2}=\sqrt{26}$，$\therefore BF=\sqrt{26}$，$\therefore \dfrac{GF-\sqrt{26}}{GF}=\dfrac{2}{15}$，解得 $GF=\dfrac{15}{13}\sqrt{26}$. 综上所述，线段 GF 的长为 $\dfrac{3}{5}\sqrt{10}$ 或 $\dfrac{15}{13}\sqrt{26}$.



图③



图④

第 6 题解图