1. 某超市销售两种类型的护眼台灯，甲类型护眼台灯进价为 56 元/个，乙类型护眼台灯进价为 55 元/个，该超市销售 2 个甲类型护眼台灯和 3 个乙类型护眼台灯可获利 29 元，销售 5 个甲类型护眼台灯比销售 4 个乙类型护眼台灯多获利 15 元.

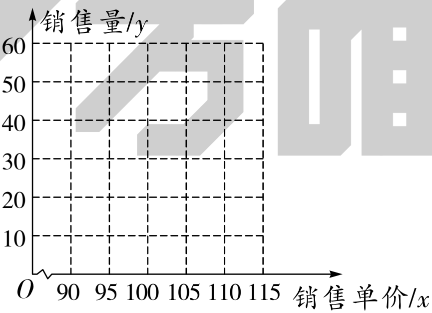
(1)求销售 1 个甲类型护眼台灯和 1 个乙类型护眼台灯各获利多少元?

(2)若该超市计划采购甲、乙两种类型的护眼台灯共 200 个，但甲类型护眼台灯的数量不能超过乙类型护眼台灯数量的$\frac{1}{3}$，根据前期的销售情况，一周可售完这些台灯，问：这一周要获得最大利润，应购进甲、乙两种类型的护眼台灯各多少个?

2. 《感动中国 2021 年度人物》航天追梦人：赤心贯苍穹，感动人心，更是激发了人们对航天事业的热爱和向往. 为了满足航天爱好者的需求，某商场购进一批神舟十三号飞船模型进行销售，已知飞船模型的进价为每个 80 元，在市场销售中发现，此模型每天销售量 y(个)与销售单价 x(元)有如下表所示关系：

销售单价 x(元)	…	90	95	100	105	110	115	…
销售量 y(个)	…	60	50	40	30	20	10	…

(1)根据表中的数据，在下图中描出实数对(x，y)所对应的点，并画出 y 关于 x 的图象；



第 2 题图

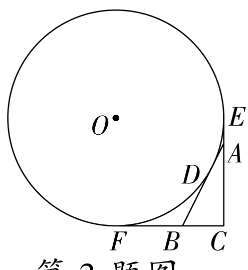
(2)根据画出的图象求出 y 关于 x 的函数关系式；

(3)若物价部门规定其销售单价不得超过进价的 150%，当销售单价定为多少元时，该商场每天销售飞船模型的利润最大，最大利润是多少元？

3. 我国古代的人们擅长通过计算来研究图形的度量性质,《测圆海镜》就是系统地研究勾股形与其相关圆关系的平面几何的著作.《测圆海镜》第二卷的第 8 题是一道弦外容圆问题:假令圆城一所,不知周径,四面开门,门外纵横各有十字大道…其东南十字道头定为巽地…或问:甲乙二人同立于巽地,乙西行四十八步而止,甲北行九十步,望乙与城参相直,城径几何? 本题的“弦外容圆”指在勾股形(直角三角形)外与弦(斜边)相切的旁切圆,题设条件如图所示,$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle C=90^\circ$,$CB=48$ 步,$CA=90$ 步,AB 正好与圆城相切于点 D,CE,CF 也与圆城相切,切点分别为点 E,F,求圆城的直径. 请根据“弦外容圆”的题设条件完成下列问题:

(1)小军解决本题时,认为线段 CF 的长就是 $\odot O$ 的半径,请你说明理由;

(2)请你帮小军计算圆城的直径.



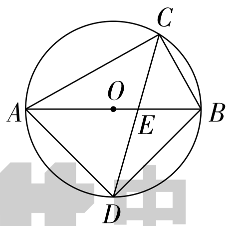
第 3 题图

4. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动（点 C 与点 A，B 不重合），弦 CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 E，连接 AD，BD.

（1）求证：$\angle ABD = \angle BAD$；

（2）若 $AE = 17$，$DE = 13$，求 AB 的长；

（3）令 CD 的长为 t，直径 $AB = d$（$d > 0$，d 是常数），求 $\triangle ABC$ 的面积 S 与 t 的函数解析式.



第 4 题图

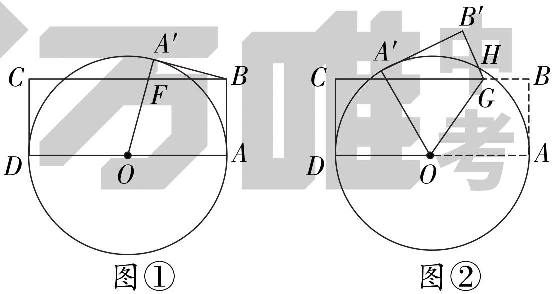
5. 已知矩形 $ABCD$,$AB=3$,$2AB<AD$,以 AD 为直径作$\odot O$,点 A'为$\odot O$ 上一点.

(1)如图①,连接 $A'B$,$A'O$,$A'O$ 交 BC 于点 F,若 $AB=A'B$,$AD=10$.

①求证:$A'B$ 是$\odot O$ 的切线;

②求 OF 的长;

(2)如图②,若点 G 是 BC 上的动点,将四边形 $AOGB$ 沿 OG 折叠,点 A 恰好落在 A'处,点 B 的对应点为点 B',GB'交$\odot O$ 于点 H. 若 $B'H=\sqrt{3}$,求 $\overset{\frown}{A'H}$ 的长.

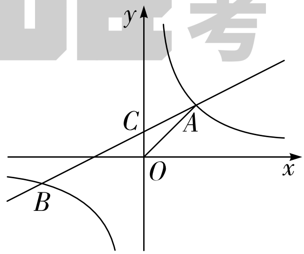


第 5 题图

6. 如图,在平面直角坐标系中,一次函数 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A,B 两点,交 y 轴于点 C,连接 OA,已知$\triangle AOC$ 的面积为 1.

(1)求反比例函数的解析式;

(2)设点 $P(a,0)(a\neq0)$,过点 P 作平行于 y 轴的直线,分别交一次函数 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象于点 M,N. 当 $PM>PN$ 时,求 a 的取值范围.



第 6 题图

7. 已知抛物线 $y=x^2-bx-5$ 与直线 $y=kx+3$ 交于 $A(4,-5)$，B 两点.

(1)求 k，b 的值；

(2)若点(6,7)关于抛物线对称轴对称的点为点 M，则点 M 是否在直线 $y=kx+3$ 上？

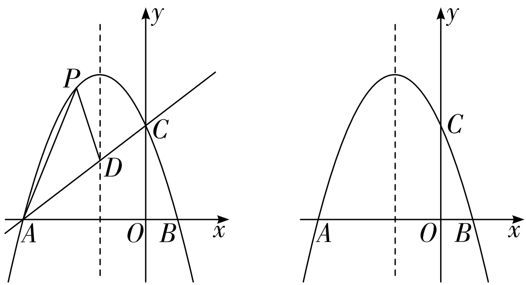
(3)将抛物线 $y=x^2-bx-5$ 向上平移 5 个单位长度，与直线 $y=kx+3$ 交于 C，D 两点(点 C 在点 D 的左侧)，求$\dfrac{AB}{CD}$的值.

8. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴交于点 $A(-4,0)$ 和点 $B(1,0)$，与 y 轴交于点 C，连接 AC.

(1)求抛物线的函数表达式；

(2)点 D 是抛物线的对称轴与 AC 的交点，点 P 为直线 AC 上方抛物线上的一点，连接 PA，PD，当 $\triangle PAD$ 面积最大时，求点 P 的坐标及 $\triangle PAD$ 面积的最大值；

(3)将抛物线水平向右平移得到新抛物线 y_1，使得 y_1 刚好经过原抛物线对称轴与 x 轴的交点 E，且与 x 轴交于点 F，点 Q 为 x 轴上方新抛物线 y_1 对称轴上一点，点 G 是平面上一点，以 E，F，Q，G 为顶点的四边形为菱形(EF 与 GQ 不垂直)，请直接写出点 G 的坐标，并写出其中一个点坐标的求解过程.



第 8 题图　　备用图

1. **解**:(1)设销售 1 个甲类型护眼台灯获利 x 元,销售 1 个乙类型护眼台灯获利 y 元,由题意得
$\begin{cases}2x+3y=29\\5x-4y=15\end{cases}$, 解得$\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}$.
答:销售 1 个甲类型护眼台灯获利 7 元,销售 1 个乙类型护眼台灯获利 5 元;
(2)设应购进甲类型护眼台灯 m 个,则购进乙类型护眼台灯$(200-m)$个,
由题意得 $m\leqslant\frac{1}{3}(200-m)$, 解得 $m\leqslant 50$,
$\therefore 0\leqslant m\leqslant 50$,
设这一周销售两种护眼台灯的利润为 w 元,则 $w=7m+5(200-m)=2m+1000$.
$\because 2>0$,
$\therefore w$ 随 m 的增大而增大,
$\therefore$ 当 $m=50$ 时,这一周可获最大利润,
此时 $200-50=150$,
答:这一周要获得最大利润,应购进甲类型护眼台灯 50 个,乙类型护眼台灯 150 个.

2. **解**:(1)如解图,y 关于 x 的图象即为所求作;
(2)根据图象,设 y 关于 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,
把点$(90,60)$,$(100,40)$代入,
得$\begin{cases}90k+b=60\\100k+b=40\end{cases}$,解得$\begin{cases}k=-2\\b=240\end{cases}$,
$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式为 $y=-2x+240$;

(3)设该商场每天销售飞船模型的利润为 w,

则 $w=(x-80)(-2x+240)=-2x^2+400x-19200$

$=-2(x-100)^2+800$,

$\because$ 其销售单价不得超过进价的 150%,

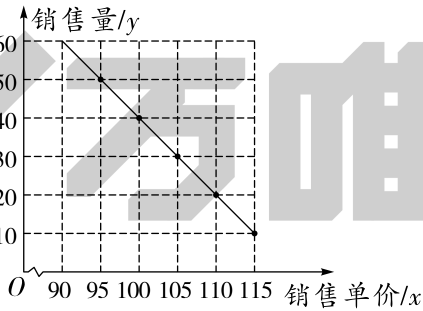
$\therefore 80\times150\%=120$,

$\therefore 80\leqslant x\leqslant120$.

$\because -2<0$,

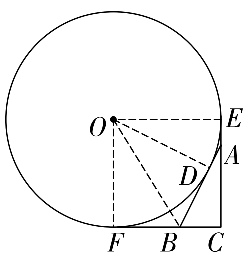
$\therefore$ 当 $x=100$ 时,w 取最大值,$w_{最大}=800$,

答:当销售单价定为 100 元时,该商场每天销售飞船模型的利润最大,最大利润是 800 元.



第 2 题解图

3. 解:(1)如解图,连接 OE,OF,



第 3 题解图

$\because CE$,CF 分别是$\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OFC=\angle CEO=90°$.

又$\because \angle C=90°$,

$\therefore$ 四边形 $OFCE$ 是矩形.

$\therefore CF=OE$,

$\because OE$ 为$\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 线段 CF 的长就是$\odot O$ 的半径;

(2)如解图,连接 OB,OD,

$\because CF$,AB 分别是$\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OFB=\angle BDO=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中,

$\begin{cases} OB=OB \\ OF=OD \end{cases}$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OBF \cong \mathrm{Rt}\triangle OBD(\mathrm{HL})$,

$\therefore BF=BD$,

同理可得 $AD=AE$.

设 $AD=y$,$BD=x$,

则 $AE=AD=y$,$BF=BD=x$,

$\therefore CE=CA+AE=90+y$, $CF=CB+BF=48+x$,

由(1)知,四边形 $OFCE$ 为矩形,

$\because OE=OF$,$\therefore$ 四边形 $OFCE$ 为正方形,

$\therefore 90+y=48+x$,

$\therefore x-y=42$. ①

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,由勾股定理得 $AB=\sqrt{CB^2+CA^2}=102$,

$\therefore x+y=102$. ②

由①和②可得 $x=72$,

$\therefore CF=48+72=120$(步),

$\therefore$ 圆城的直径为 240 步.

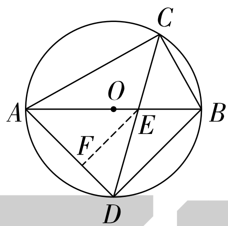
4. (1)**证明:**$\because CD$ 平分$\angle ACB$,

$\therefore \angle ACD=\angle BCD$,

$\because \angle ACD=\angle ABD$, $\angle BCD=\angle BAD$,

$\therefore \angle ABD=\angle BAD$;

(2)**解:**如解图①,过点 E 作 $EF\perp AD$ 于点 F,



第 4 题解图①

$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ADB=90°$,

$\therefore \angle ABD=\angle BAD=45°$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中,$EF=AF=AE\cdot\sin45°=\dfrac{17\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore DF=\sqrt{DE^2-EF^2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore AD=AF+DF=12\sqrt{2}$,

$\therefore AB=\sqrt{2}AD=24$;

(3)**解:**如解图②,过点 A 作 $AM\perp CD$ 于点 M,过点 B 作 $BN\perp CD$ 于点 N,

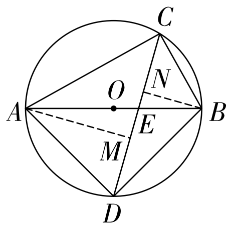
$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB=90°$, $\angle ACB=90°$,

$\therefore \angle ADM+\angle BDN=\angle ADM+\angle DAM=90°$,

$\therefore \angle DAM=\angle BDN$,

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,



第 4 题解图②

$\therefore \angle ACD=\angle BCD=45°$,

$\therefore AD=BD$,

又 $\because \angle AMD=\angle DNB=90°$,

$\therefore \triangle AMD\cong\triangle DNB(\mathrm{AAS})$,

$\therefore AM=DN$,

$\because \angle ACD=\angle BCD=45°$,

$\therefore AM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC, CN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC$,

$\therefore CD=CN+DN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(BC+AC)$,

即 $BC+AC=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}t$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC^2+BC^2=AB^2=d^2$,

$\because (AC+BC)^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot BC$,

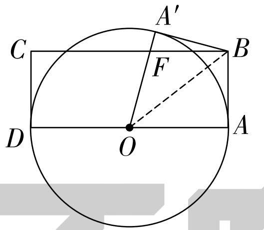
$\therefore (\sqrt{2}t)^2=d^2+2AC\cdot BC$,

$\therefore AC\cdot BC=t^2-\dfrac{d^2}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}t^2-\frac{d^2}{4}$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 S 与 t 的函数解析式为 $S=\frac{1}{2}t^2-\frac{d^2}{4}$.

5. (1)①**证明**:如解图①,连接 BO,



第 5 题解图①

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle OAB=90°$,

$\because AB=A'B, OA=OA', OB=OB$,

$\therefore \triangle A'BO\cong\triangle ABO$,

$\therefore \angle OA'B=\angle OAB=90°$,

$\because OA'$是$\odot O$ 的半径,

$\therefore A'B$ 是$\odot O$ 的切线;

②**解**:如解图①,由①可知

$\triangle A'BO\cong\triangle ABO$,

$\therefore \angle A'OB=\angle AOB$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore BC/\!/AD$,

$\therefore \angle AOB=\angle CBO$,

$\therefore \angle CBO=\angle A'OB$,

$\therefore FB=FO$.

在 $Rt\triangle A'BF$ 中，$A'F^2+A'B^2=BF^2$,

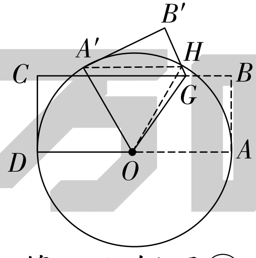
$\because AD=10, AB=3$,

$\therefore A'B=3, A'O=5$,

$\therefore (5-OF)^2+3^2=OF^2$,

解得 $OF=\frac{17}{5}$;

(2)**解:** 如解图②，连接 $A'H$，OH，由题意可知 $\angle HB'A'=\angle OA'B'=90°$，$A'B'=AB=3$,



第 5 题解图②

$\therefore \tan\angle HA'B'=\frac{B'H}{A'B'}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle HA'B'=30°$,

$\therefore \angle HA'O=60°, A'H=2\sqrt{3}$.

$\because OA'=OH$,

$\therefore \triangle OA'H$ 是等边三角形,

$\therefore \angle HOA'=60°, OA'=OH=A'H=2\sqrt{3}$,

$\therefore \overset{\frown}{A'H}$ 的长为$\dfrac{n\pi r}{180}=\dfrac{60\pi\times 2\sqrt{3}}{180}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

6. 解：(1)将 $x=0$ 代入 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 得，$y=1$，则 $C(0,1)$，$\therefore OC=1$，

设点 A 的坐标为(x_A, y_A)，

$\because \triangle AOC$ 的面积为 1，

$\therefore \dfrac{1}{2}OC\cdot x_A=1$，解得 $x_A=2$，

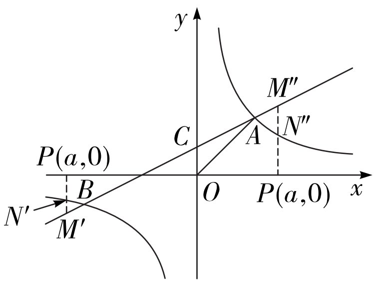
$\therefore y_A=\dfrac{1}{2}\times 2+1=2$，$\therefore A(2,2)$.

又$\because$ 点 A 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$的图象上，

$\therefore k=2\times 2=4$，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{4}{x}$；

(2)如解图，当 $a>0$ 时，若 $PM>PN$，则 $a>2$，



第 6 题解图

联立$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+1,\\ y=\dfrac{4}{x},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-4,\\ y=-1,\end{cases}$

$\therefore B(-4,-1)$,

当 $a<0$ 时,若 $PM>PN$,则 $a<-4$.

综上所述,a 的取值范围为 $a<-4$ 或 $a>2$.

7. 解:(1)$\because A(4,-5)$在抛物线 $y=x^2-bx-5$ 上,

$\therefore -5=4^2-4b-5$,解得 $b=4$,

$\because A(4,-5)$在直线 $y=kx+3$ 上,

$\therefore -5=4k+3$,解得 $k=-2$,

$\therefore k=-2,b=4$;

(2)由(1)知,抛物线的解析式为 $y=x^2-4x-5$,

直线的解析式为 $y=-2x+3$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4}{2\times1}=2$,

$\therefore$ 点(6,7)关于抛物线对称轴对称的点为(-2,7),

$\therefore$ 点 M 的坐标为(-2,7),

将 $x=-2$ 代入直线 $y=-2x+3$ 中,得 $y=7$,

$\therefore$ 点 M 在直线 $y=-2x+3$ 上;

(3)由(1)知,抛物线的解析式为 $y=x^2-4x-5$,

直线的解析式为 $y=-2x+3$,

联立$\begin{cases}y=x^2-4x-5\\ y=-2x+3\end{cases}$,解得$\begin{cases}x_1=4\\ y_1=-5\end{cases}$,$\begin{cases}x_2=-2\\ y_2=7\end{cases}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为(-2,7),

$\therefore AB=\sqrt{(4+2)^2+(-5-7)^2}=6\sqrt{5}$,

将抛物线向上平移5个单位长度,得到的新抛物线的解析式为 $y=x^2-4x$,

联立$\begin{cases}y=x^2-4x\\y=-2x+3\end{cases}$,解得$\begin{cases}x_1=-1\\y_1=5\end{cases}$,$\begin{cases}x_2=3\\y_2=-3\end{cases}$,

$\because$ 点 C 在点 D 的左侧,

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(-1,5)$,点 D 的坐标为$(3,-3)$,

$\therefore CD=\sqrt{(3+1)^2+(-3-5)^2}=4\sqrt{5}$,

$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{3}{2}$.

8. 解:(1)根据题意可设抛物线的函数表达式为 $y=a(x+4)(x-1)(a\neq0)$,

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 y 轴交于点 C,

$\therefore C(0,3)$,

将 $C(0,3)$ 代入 $y=a(x+4)(x-1)$ 中,

得 $a(0+4)(0-1)=3$,解得 $a=-\dfrac{3}{4}$,

$\therefore y=-\dfrac{3}{4}(x+4)(x-1)=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{9}{4}x+3$;

(2)设 AC 所在直线的函数表达式为 $y=kx+d(k\neq0)$,

将 $A(-4,0)$,$C(0,3)$ 两点代入 $y=kx+d$ 中,

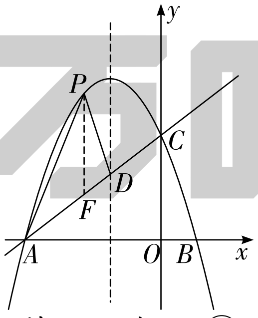
得$\begin{cases}0=-4k+d\\3=d\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\dfrac{3}{4}\\d=3\end{cases}$，

$\therefore AC$ 所在直线的函数表达式为 $y=\dfrac{3}{4}x+3$.

$\because$ 抛物线对称轴为直线 $x=-\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(-\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{8})$.

如解图①，过点 P 作 $PF/\!/y$ 轴交 AC 于点 F.



第 8 题解图①

设 $P(m,-\dfrac{3}{4}m^2-\dfrac{9}{4}m+3)$，则点 $F(m,\dfrac{3}{4}m+3)$，

$\therefore S_{\triangle PAD}=\dfrac{1}{2}\times[-\dfrac{3}{2}-(-4)]\times[-\dfrac{3}{4}m^2-\dfrac{9}{4}m+3-(\dfrac{3}{4}m+3)]=-\dfrac{15}{16}(m+2)^2+\dfrac{15}{4}$，

$\because -\frac{15}{16}<0$,

$\therefore$ 当 $m=-2$ 时,$S_{\triangle PAD最大}=\frac{15}{4}$,此时点 P 的坐标为$(-2,\frac{9}{2})$;

(3)点 G 的坐标为$(6,\frac{5\sqrt{3}}{2})$或$(-4,\frac{5\sqrt{3}}{2})$.

根据题意得,点 E 的坐标为$(-\frac{3}{2},0)$,

$\therefore$ 原抛物线向右平移$\frac{5}{2}$个单位长度得到抛物线 y_1.

$\because$ 原抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3=-\frac{3}{4}(x+\frac{3}{2})^2+\frac{75}{16}$,

$\therefore$ 抛物线 y_1 的函数表达式为 $y_1=-\frac{3}{4}(x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2})^2+\frac{75}{16}=-\frac{3}{4}(x-1)^2+\frac{75}{16}$,

$\therefore$ 抛物线 y_1 的对称轴为直线 $x=1$.

设点 Q 的坐标为$(1,h)(h>0)$,由抛物线的对称性可得 $F(\frac{7}{2},0)$,

$\therefore EF=\frac{7}{2}-(-\frac{3}{2})=5.$

$\because EF$ 与 GQ 不垂直,

$\therefore EF$ 为菱形的边,

$\therefore$ 分以下两种情况进行讨论:①如解图②,当 EG 为菱形对角线时,$EF=EQ$,即 $EF^2=EQ^2$.

$\because EQ^2=[1-(-\frac{3}{2})]^2+h^2=\frac{25}{4}+h^2$,

$\therefore 25=\frac{25}{4}+h^2$,解得 $h=\frac{5\sqrt{3}}{2}$(负值已舍去),

$\therefore Q(1,\frac{5\sqrt{3}}{2})$.

$\because FG=EQ$,$\therefore y_G-y_F=y_Q-y_E$,$x_G-x_F=x_Q-x_E$,

$\therefore y_G=\frac{5\sqrt{3}}{2}$,$x_G=6$,

$\therefore$ 点 G 的坐标为$(6,\frac{5\sqrt{3}}{2})$.

②如解图③,当 EQ 为菱形对角线时,$EF=FQ$,即 $EF^2=FQ^2$,

$\because FQ^2=(\frac{7}{2}-1)^2+h^2=\frac{25}{4}+h^2$,

$\therefore 25=\frac{25}{4}+h^2$,解得 $h=\frac{5\sqrt{3}}{2}$(负值已舍去),

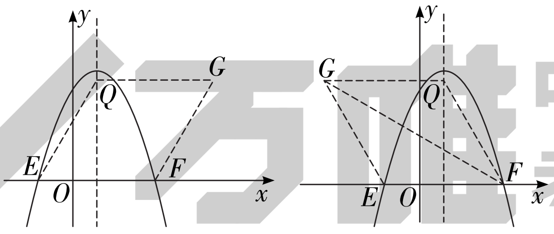
$\therefore Q(1,\dfrac{5\sqrt{3}}{2})$.

$\because EG=FQ$,

$\therefore y_G-y_E=y_Q-y_F, x_G-x_E=x_Q-x_F$,

$\therefore y_G=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, x_G=-4$,

$\therefore$ 点 G 的坐标为$(-4,\dfrac{5\sqrt{3}}{2})$.(写出其中一个点 G 坐标的求解过程即可)



图② 图③

第 8 题解图