更多新考法试题·数学
参考答案

题型一　二次函数综合题

1. **解:**(1)将点 $A(-1,0)$, $B(4,5)$ 代入 $y=ax^2+bx+5$ 中,

得 $\begin{cases}0=a-b+5\\5=16a+4b+5\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=-1\\b=4\end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+4x+5$;

(2)当 $S_{\triangle CDE}=2S_{\triangle CEF}$ 时,则有 $DE=2EF$,

$\because A(-1,0)$, $B(4,5)$,

$\therefore$ 易得直线 AB 的表达式为 $y=x+1$.

设 $D(x,-x^2+4x+5)$,则 $E(x,x+1)$, $F(x,0)$,

$\therefore DE=-x^2+4x+5-(x+1)=-x^2+3x+4$, $EF=x+1$,

$\therefore -x^2+3x+4=2(x+1)$,

解得 $x_1=-1$(舍去), $x_2=2$,

$\therefore DE=-x^2+3x+4=-4+6+4=6$;

(3)令 $-x^2+4x+5=0$,

解得 $x_1=-1$, $x_2=5$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(5,0)$.

由(2)可知直线 AB 的表达式为 $y=x+1$.

设点 G 的坐标为 $(0,m)$,点 E 的坐标为 $(n,n+1)$,则点 F 的坐标为 $(n,0)$.

如解图, $\because$ 四边形 $CEGF$ 是平行四边形,

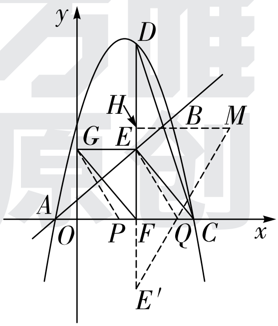
$\therefore CF /\!/ EG, CF=EG$,

$\therefore \begin{cases} m=n+1 \\ 5-n=n \end{cases}$,

解得$\begin{cases} m=\dfrac{7}{2} \\ n=\dfrac{5}{2} \end{cases}$,

$\therefore$ 点 G 的坐标为$(0,\dfrac{7}{2})$,点 E 的坐标为$(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2})$.

如解图,连接 PG,QE,



第 1 题解图

$\because GE /\!/ PQ, GE=PQ=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore$ 四边形 $GPQE$ 是平行四边形,

$\therefore GP=EQ$,

$\therefore GP+MQ=EQ+MQ$,

$\therefore$ 要使 $GP+MQ$ 的值最小,则可使 $EQ+MQ$ 的值最小.

作点 E 关于 x 轴的对称点 E',连接$E'M$,则 $EQ=E'Q$,此

时 $E'M$ 与 x 轴的交点即为满足条件的点 Q,

$\therefore EQ+MQ$ 的最小值为 $E'M$ 的长.

过点 M 作 $MH\perp DF$ 于点 H,$\because$ 点 E 的坐标为$(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$,

点 M 的坐标为$(\frac{13}{2},\frac{9}{2})$

$\therefore$ 点 E'的坐标为$(\frac{5}{2},-\frac{7}{2})$,点 H 的坐标为$(\frac{5}{2},\frac{9}{2})$,

$\therefore MH=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4,HE'=\frac{9}{2}-(-\frac{7}{2})=8.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle MHE'$ 中,$E'M=\sqrt{MH^2+HE'^2}=4\sqrt{5}$,

$\therefore GP+MQ$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.

2. 解:(1)$\because$ 抛物线经过点(0,1),对称轴在 y 轴的左侧,

$\therefore 1=b^2,-\frac{b}{2a}<0$,

$\because a=1>0,\therefore b=1$(负值已舍去),

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2+x+1$;

(2)$\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+b^2=(x+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2}$,

①当 $b\geqslant-\frac{b}{2}$,即 $b\geqslant0$ 时,y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=b$ 时,y 取得最小值,即 $b^2+b^2+b^2=21$,

解得 $b=\sqrt{7}$ 或 $b=-\sqrt{7}$(舍去);

②当 $b+3\leqslant -\frac{b}{2}$，即 $b\leqslant -2$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=b+3$ 时，y 取得最小值，

即 $(b+3)^2+b(b+3)+b^2=21$，

整理得 $b^2+3b-4=0$，

解得 $b=-4$ 或 $b=1$（舍去）；

③当 $b<-\frac{b}{2}<b+3$，即 $-2<b<0$ 时，

当 $x=-\frac{b}{2}$ 时，y 取得最小值，$y_{最小}=\frac{3b^2}{4}=21$，

解得 $b=\pm 2\sqrt{7}$（舍去）.

综上所述，b 的值为 $\sqrt{7}$ 或 -4；

(3) $\because$ $2x^2+4x+m\geqslant x^2+bx+b^2$，且 $b=1$，

$\therefore$ $x^2+3x+m-1\geqslant 0$，

设抛物线 $y'=x^2+3x+m-1$，则抛物线 y' 的对称轴为直线 $x=-\frac{3}{2}<0$，

$\because$ $a=1>0$，

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，y' 取最小值，最小值为 $m-1$，

$\therefore$ $m-1\geqslant 0$，

$\therefore$ $m\geqslant 1$，

$\therefore$ m 的最小值为 1.

3. 解：(1) 由题意知，抛物线的顶点坐标为 (2.5, 3.5)，

$\therefore$ 可设抛物线的表达式为 $y=a(x-2.5)^2+3.5(a\neq0)$，
由题图知，图象过点 $B(4,3.05)$，
代入抛物线的表达式 $y=a(x-2.5)^2+3.5$，
得 $a(4-2.5)^2+3.5=3.05$，
解得 $a=-0.2$，
$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-0.2(x-2.5)^2+3.5$；
(2)令 $y=2.7$，则 $2.7=-0.2(x-2.5)^2+3.5$，
解得 $x_1=4.5$，$x_2=0.5$.
$\because$ 此时小明与篮筐的距离为 4 m，
$\therefore$ $x=0.5$，
$\therefore$ 小明投篮出手时，小刚与小明的距离在 0.5 m 以内才能在空中截住篮球；
(3)设球出手时，小明跳离地面的高度为 h m，
则球出手时，球的高度为 $h+1.75+0.25=(h+2)$ m.
$\because$ 抛物线 $y=-0.2(x-2.5)^2+3.5$ 过点 A，
$\therefore$ $h+2=-0.2\times(0-2.5)^2+3.5$，
解得 $h=0.25$，
$\therefore$ 球出手时，小明跳离地面的高度是 0.25 m.
$\because$ 当小明不起跳直接投篮时，篮球运动的抛物线形状与跳起投篮时相同，
$\therefore$ 小明不起跳直接投篮时，篮球运动的抛物线的表达式为 $y+0.25=-0.2(x-2.5)^2+3.5$，
即 $y=-0.2(x-2.5)^2+3.25$，
当 $y=3.05$ 时，$-0.2(x-2.5)^2+3.25=3.05$，

解得 $x_1=1.5$,$x_2=3.5$,

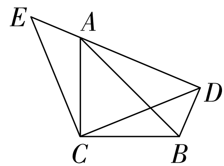
∴ 小明与篮筐的水平距离为 3.5 m 或 1.5 m 时,可以投中篮筐,

∴ 他应该向前走 $4-3.5=0.5$ m 或 $4-1.5=2.5$ m(不符合题意,舍去),

∴ 若小明想投中篮筐,则他应该向前走 0.5 m.

题型二　几何图形综合题

4. 解：(1)如解图①，连接 BD，



第 4 题解图①

$\because$ $\triangle ACB$ 与 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore$ $\angle ECD=\angle ACB=90°$，$\angle E=\angle ADC=45°$，$EC=DC$，$AC=BC$，$AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore$ $2AC^2=AB^2$，

$\because$ $\angle ECD-\angle ACD=\angle ACB-\angle ACD$，

$\therefore$ $\angle ACE=\angle BCD$，

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BDC$ 中，$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACE=\angle BCD, \\ EC=DC \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle AEC\cong\triangle BDC(\mathrm{SAS})$，

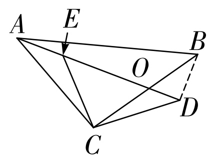
$\therefore$ $AE=BD$，$\angle E=\angle BDC=45°$，

$\therefore$ $\angle BDA=\angle BDC+\angle ADC=90°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，$AD^2+BD^2=AB^2$，

$\therefore$ $AD^2+AE^2=2AC^2$；

(2)如解图②，连接 BD，设 AD 交 BC 于点 O，



第 4 题解图②

$\because$ $\triangle ACB$ 与 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore$ $\angle ECD=\angle ACB=90°$，$EC=DC$，$AC=BC$，$AB=\sqrt{CA^2+CB^2}$，$DE=\sqrt{CE^2+CD^2}$，

$\because CA=CB=3\sqrt{2}, CE=CD=2\sqrt{2}$,

$\therefore AB=6, DE=4$,

$\because \angle ECD-\angle ECB=\angle ACB-\angle ECB$,

$\therefore \angle ACE=\angle BCD$,

在$\triangle AEC$和$\triangle BDC$中,

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACE=\angle BCD, \\ EC=DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BDC(\text{SAS})$,

$\therefore AE=BD, \angle CAE=\angle CBD$,

$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle CAO+\angle AOC=90°$,

$\because \angle AOC=\angle BOD$,

$\therefore \angle BOD+\angle CBD=90°$,

$\therefore \angle BDO=90°$,

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,$AB^2=AD^2+BD^2=AD^2+AE^2$,$AD=AE+DE=AE+4$,

$\therefore 6^2=(AE+4)^2+AE^2$,

解得$AE=\sqrt{14}-2$或$AE=-\sqrt{14}-2$(舍去),

$\therefore$线段AE的长为$\sqrt{14}-2$;

(3)$\because \triangle ACB$与$\triangle ECD$都是等腰直角三角形,

$\therefore \angle ECD=\angle ACB=90°, \angle E=\angle ADC=45°, EC=DC, AC=BC$,

$\because \angle ECD-\angle ACD=\angle ACB-\angle ACD$,

$\therefore \angle ACE=\angle BCD$,

在$\triangle AEC$和$\triangle BDC$中,

$$\begin{cases}AC=BC\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ EC=DC\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BDC(\mathrm{SAS})$,

$\therefore AE=BD, \angle E=\angle BDC=45^\circ$,

$\therefore \angle BDA=\angle BDC+\angle ADC=90^\circ$,

$\therefore S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BD=\dfrac{1}{2}AD\cdot AE$,

$\because CE=CD=2\sqrt{2}, \angle ECD=90^\circ$,

$\therefore DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=4$,

$\because DE=AE+AD$,

$\therefore AE=4-AD$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle ABD}&=\frac{1}{2}AD\cdot(4-AD)\\&=-\frac{1}{2}AD^2+2AD\\&=-\frac{1}{2}(AD-2)^2+2,\end{aligned}$$

$\because -\dfrac{1}{2}<0$,

$\therefore$ 当$AD=2$时,$\triangle ABD$的面积有最大值,最大值为2.

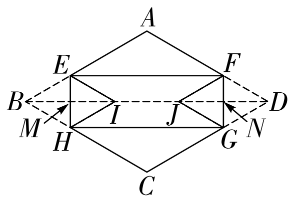
5. (1) **证明:** 如解图①,设 EH 交 BD 于点 M, FG 交 BD 于点 N,

由折叠可知, EH 垂直平分 BI, FG 垂直平分 DJ,

$\therefore \angle BME=\angle DNF=90°$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=AD$, $\angle ABD=\angle ADB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAD)$,



第 5 题解图①

又$\because BE=DF$,

$\therefore AB-BE=AD-DF$,

即 $AE=AF$,

$\therefore \angle AEF=\angle AFE=\frac{1}{2}(180°-\angle BAD)$,

$\therefore \angle ABD=\angle ADB=\angle AEF=\angle AFE=\frac{1}{2}(180°-\angle BAD)$,

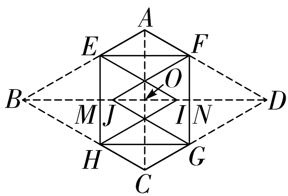
$\therefore EF/\!/BD$,

$\therefore \angle BME=\angle HEF=90°$,

同理可得, $\angle EHG=\angle HGF=\angle GFE=90°$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形;

(2) **解:** 如解图②,连接 AC 交 BD 于点 O,设 EH 交 BD 于点 M, FG 交 BD 于点 N,



第 5 题解图②

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$\therefore EF=EH$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$AB=4$, $\angle BAD=120°$,

$\therefore BD=2BO$, $\angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60°$,

又$\because EH/\!/AC$,

$\therefore \angle BEH=\angle BAC=\angle ABC=\angle BHE=60°$, $OB=AB\cdot\sin60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$\therefore BE=BH=EH=EF$, $BD=2BO=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$,

设 $EF=x$,则 $EH=BE=x$, $AE=4-x$,

$\because EF/\!/BD$,

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABD$,

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BD}$, 即$\frac{4-x}{4}=\frac{x}{4\sqrt{3}}$,

解得 $x=6-2\sqrt{3}$,

$\therefore EF=6-2\sqrt{3}$,

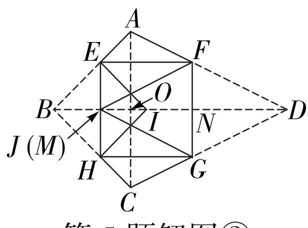
$\therefore S_{\text{正方形}EFGH}=(6-2\sqrt{3})^2=48-24\sqrt{3}$;

(3)**解:**如解图③,连接 AC 交 BD 于点 O,设 EH 交 BD 于点 M,FG 交 BD 于点 N,

$\because BA=BC=5\sqrt{2}$, $DA=DC=5\sqrt{5}$,

$\therefore BD$ 垂直平分 AC,

$\therefore \angle AOB=\angle AOD=90°$, AC



第 5 题解图③

$=2OA$.

设 $OB=x$,则 $OD=15-x$,

则有 $(5\sqrt{2})^2-x^2=(5\sqrt{5})^2-(15-x)^2$,

解得 $x=5$,

$\therefore OB=5,OD=10$,

$\therefore AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2}=5$,

$\therefore AC=2OA=2\times5=10$.

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$\therefore EF=EH$.

设 $EF=EH=m$,

由题易得$\frac{EF}{BD}=\frac{AE}{AB},\frac{EH}{AC}=\frac{BE}{AB}$,

$\therefore \frac{EF}{BD}+\frac{EH}{AC}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB}=1$,

$\therefore \frac{m}{15}+\frac{m}{10}=1$,

解得 $m=6$,

$\therefore EF=EH=6$,

由题易得$\frac{BM}{BO}=\frac{EH}{AC}$,

$\therefore \frac{BM}{5}=\frac{6}{10}$,解得 $BM=3$.

由折叠可知,$BM=IM=3$,

$\therefore BI=BM+IM=3+3=6$,

同理可得 $DJ=12$,

$\therefore IJ=BI+DJ-BD=6+12-15=3$.

6. (1)**解:**$AE=HG$.

理由:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD=90^\circ$.

由旋转可知,$\angle EFG=\angle AFH=90^\circ$,

$\therefore \angle AFE=\angle HFG$,

又$\because AI$ 平分$\angle BAD$,

$\therefore \angle BAI=\angle DAI=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$,

$\because \angle AFH=90^\circ$,

$\therefore \angle AHF=\angle DAI=\angle BAI=45^\circ$,$\therefore AF=HF$.

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle HGF(\text{ASA})$,

$\therefore AE=HG$;

(2)**证明:**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD=\angle ABC=90^\circ$,$AD/\!/BC$.

又$\because AI$ 平分$\angle BAD$,

$\therefore \angle BAI=\angle DAI=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$,

$\therefore \angle AIB=\angle DAI=45^\circ$,

$\therefore \angle AIB=\angle BAI$,

$\therefore AB=IB$.

$\because AF=AE$,

$\therefore AF=IE$,$\angle AEF=\angle AFE$,

由旋转可知，$\angle EFG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle EFG-\angle AFE=\angle ABC-\angle AEF$，

$\therefore \angle AFG=\angle IEF$，

在$\triangle AGF$和$\triangle IFE$中，$\begin{cases}\angle GAF=\angle FIE \\ AF=IE \\ \angle AFG=\angle IEF\end{cases}$，

$\therefore \triangle AGF\cong\triangle IFE$(ASA)；

(3)**解**：如解图，$\because \angle AGF=\angle AFG$，

$\therefore AG=AF$.

与(1)同理，可得$\triangle AEF\cong\triangle HGF$，

$\therefore AE=HG$，

$\because AI$平分$\angle BAD$，

$\therefore \angle BAI=\angle DAI=45^{\circ}$，

由旋转可知，$\angle AFH=90^{\circ}$，

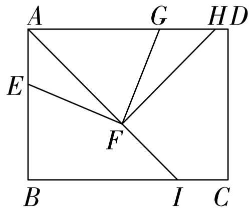
$\therefore \angle AHF=45^{\circ}$，

$\therefore \triangle AHF$为等腰直角三角形，$AF=HF$，

$\therefore AH=\sqrt{2}AF$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{HG}{AF}=\dfrac{AH-AG}{AF}=\dfrac{\sqrt{2}AF-AF}{AF}=\sqrt{2}-1$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF}$的值为$\sqrt{2}-1$.



第 6 题解图