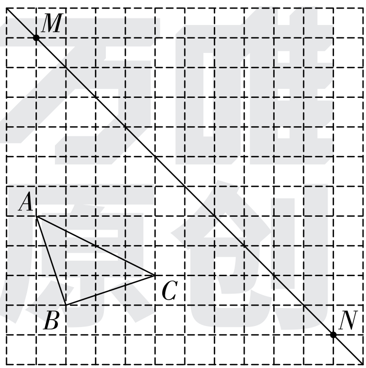
更多新考法试题·数学

1. (**2023 安徽预测卷**)如图,在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的网格中,$\triangle ABC$ 的顶点均在格点(网格线的交点)上.

(1)画出$\triangle ABC$ 关于直线 MN 对称的$\triangle DEF$(点 A,B,C 分别对应点 D,E,F);

(2)仅用无刻度直尺,在 DF 边上找一点 P,使得点 P 到边 DE,EF 的距离相等(角平分线上的点到角两边的距离相等).



第 1 题图

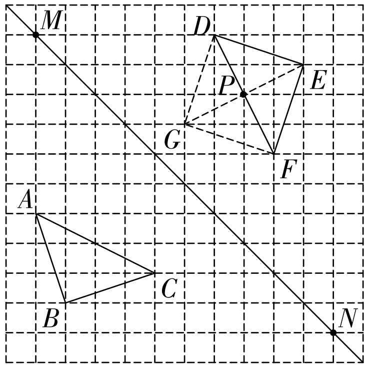
1. 解:(1)如解图,$\triangle DEF$ 即为所求;

(2)如解图,点 P 即为所求.

【作法提示】由网格的特点知,$EF=DE=\sqrt{10}$,$DF=2\sqrt{5}$,

$\because DF^2=EF^2+DE^2$,$\therefore \angle DEF=90^\circ$,构造正方形 $EFGD$,由正方形的性质得对角线平分对角,连接 EG,交 DF 于点 P,$\therefore EP$ 为$\angle DEF$ 的平分线,即点 P 到边 DE,EF 的距

离相等.

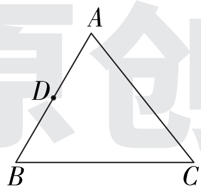


第 1 题解图

2. (**2023 广西黑白卷**)如图,在$\triangle ABC$中,$\angle B=60°$,D为AB的中点.

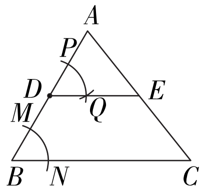
(1)尺规作图:在AC上找一点E,使$DE /\!/ BC$(不写作法,保留作图痕迹);

(2)若$AD=2$,$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$,求$DE$的长.



第 2 题图

2. **解**:(1)如解图①,点E即为所求;

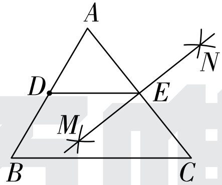


第 2 题解图①

【作法提示】第一步：以点 B 为圆心，小于 BD 长为半径画弧，与 AB，BC 交于点 M，N；第二步：以点 D 为圆心，以同等长度为半径，在点 D 的右侧画弧，与 AB 交于点 P，则 $DP=BM=BN$；第三步：以点 P 为圆心，MN 的长为半径画弧，与以点 D 为圆心，DP 长为半径所画的弧相交于点 Q；第四步：连接 DQ 并延长，交 AC 于点 E，点 E 即为所求. 由作图可得 $\angle ADE=\angle ABC$，则同位角相等，两直线平行，即 $DE /\!/ BC$.

【一题多解法】

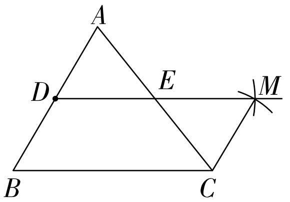
解法一：如解图②，点 E 即为所求；



第 2 题解图②

【作法提示】第一步：分别以点 A，C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径画弧，两弧分别交于点 M，N；第二步：连接 MN，与 AC 交于点 E，点 E 即为所求. 由作图可得，MN 为 AC 的垂直平分线，E 为 AC 的中点，由题可知点 D 为 AB 的中点，则 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，得 $DE /\!/ BC$.

解法二：如解图③，点 E 即为所求；

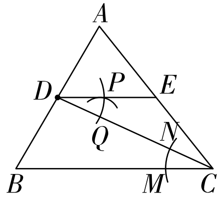


第 2 题解图③

【作法提示】第一步：以点 D 为圆心，BC 长为半径，在点

D 的右侧画弧;第二步:以点 C 为圆心,BD 长为半径在点 C 的上方画弧,两弧交于点 M;第三步:连接 DM 交 AC 于点 E,点 E 即为所求. 由作图可得 $BD=CM$,$BC=DM$,则四边形 $BCMD$ 为平行四边形,通过平行四边形的性质可得 $DE/\!/BC$.

解法三:如解图④,点 E 即为所求;



第 2 题解图④

【作法提示】第一步:连接 CD;第二步:以点 C 为圆心,小于 CD 长为半径画弧,与 BC,DC 交于点 M,N;第三步:以点 D 为圆心,以同等长度为半径画弧,与 CD 相交于点 Q,则 $DQ=CM=CN$;第四步:以点 Q 为圆心,MN 长为半径画弧,与以点 D 为圆心,DQ 长为半径所画的弧相交于点 P;第五步:连接 DP 并延长,交 AC 于点 E,点 E 即为所求. 由作图可得 $\angle BCD=\angle CDE$,则内错角相等,两直线平行,即 $DE/\!/BC$.

(2)如解图⑤,过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F,

$\because D$ 为 AB 的中点,$AD=2$,

$\therefore AB=2AD=4$,

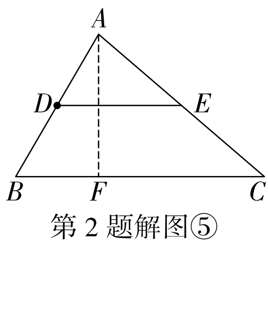
$\because \angle B=60°$,$AF\perp BC$,

$\therefore AF=AB\cdot\sin60°=2\sqrt{3}$,

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AF=6\sqrt{3}$,

$\therefore BC=6$,

$\because DE/\!/BC$,D 为 AB 的中点,

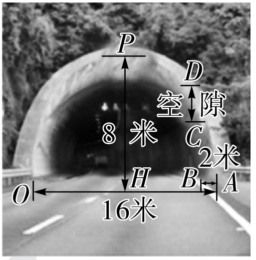


第 2 题解图⑤

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}BC=3.$

3. (2023 **甘肃预测卷**) 根据以下素材，探索完成任务.

<table>
<tr><td colspan="3">如何设计隧道的限高方案</td></tr>
<tr><td>素材 1</td><td>如图是一个横断面呈抛物线形状的公路隧道，经测量，其高度 PH 为 8 米，宽度 OA 为 16 米.</td><td>

第 3 题图</td></tr>
<tr><td>素材 2</td><td colspan="2">车辆在此隧道可以双向通行，但规定车辆必须在隧道的中心线右侧、距离路边缘 2 米 ($AB=2$ 米) 这一范围内行驶，并保持车辆顶部与隧道的最小空隙 CD 不少于 $\dfrac{1}{2}$ 米. 为了保证车辆的行驶安全，隧道下方需要设置限高标志以警示车辆驾驶员.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">问题解决</td></tr>
<tr><td>任务 1</td><td>确定隧道形状</td><td>在图中建立合适的平面直角坐标系，求抛物线的函数表达式；</td></tr>
<tr><td>任务 2</td><td>探究隧道限高方案</td><td>为使车辆按素材 2 的要求安全通过，求该隧道限高多少米？</td></tr>
</table>

3. **解：**任务 1：如解图①，以 O 为原点，以 OA 所在直线为 x 轴，以垂直于 OA 且过点 O 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，

由题意得，顶点 P 的坐标为 $(8,8)$，

$\therefore$ 设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-8)^2+8(a\neq0)$，

$\because$ 图象经过点 $(0,0)$，

$\therefore$ $0=a(0-8)^2+8$，

$\therefore$ $a=-\frac{1}{8}$，

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{8}(x-8)^2+8$，即 $y=-\frac{1}{8}x^2+2x$；

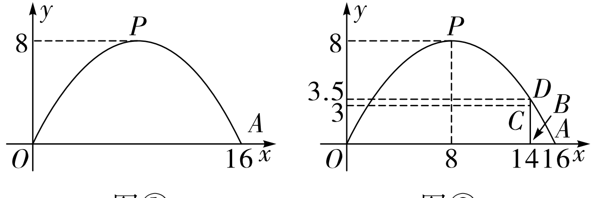
任务 2：由解图②可知，当车高 h 一定时，空隙的最小值 CD 在 $x=14$ 时取得，

此时，$y=-\frac{1}{8}\times(14-8)^2+8=\frac{7}{2}$，

此时，$CD=\frac{7}{2}-h$，由题意得，$\frac{7}{2}-h\geqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore$ $h\leqslant3$，

$\therefore$ 该隧道限高 3 米.



第 3 题解图

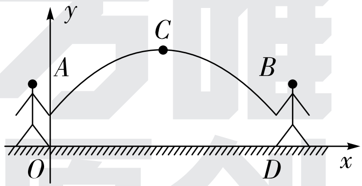
4. **(2023 安徽黑白卷)** 同学们在操场玩跳大绳游戏时，绳甩到最高处时的形状是抛物线. 正在甩绳的甲、乙两名同学拿绳的手间距 AB 为 6 米，到地面的距离 AO 和 BD

均为 0. 9 米,绳子甩到最高点 C 处时,最高点距地面的垂直距离为 1. 8 米,距甲同学的水平距离为 3 米,以点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系,设此抛物线的解析式为$y=ax^2+bx+0.9$.

(1)求该抛物线的解析式;

(2)如果身高为 1. 4 米的小明站在 OD 之间,设小明站在距离点 O 的水平距离 d 米处,当绳子甩到最高处时,若要使绳子不能碰到小明的头,求 d 的取值范围;

(3)如果参与跳大绳的同学有 12 人,两人负责甩绳子,剩下的同学想要一起跳绳,当绳子甩到最高点且超过他们头顶时,问剩下的同学是否可以在 OD 之间一起玩跳大绳?(12 个同学身高与小明相同,且每个同学同方向站立时的脚跟之间距离不小于 0. 5 米就可以一起玩)



第 4 题图

4. 解:(1)由题意得,甲、乙两名同学拿绳的手间距 AB 为 6 米,则点 B 的横坐标为 6,到地面的距离 AO 和 BD 均为 0. 9 米,

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 0. 9,$\therefore B(6,0.9)$,

$\because$ 当绳子甩到最高点 C 处时,最高点距地面的垂直距离为 1. 8 米,距甲同学的水平距离为 3 米,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $C(3,1.8)$,

将点 B,C 的坐标代入 $y=ax^2+bx+0.9$,

得$\begin{cases}36a+6b+0.9=0.9\\9a+3b+0.9=1.8\end{cases}$,

解得$\begin{cases}a=-0.1\\b=0.6\end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式是 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$;

(2)小明的身高为 1.4 米,即 $y=1.4$,

将 $y=1.4$ 代入 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$,

得 $1.4=-0.1x^2+0.6x+0.9$,

解得 $x_1=1$,$x_2=5$,

当绳子甩到最高处时,若要使绳子不碰到小明的头,则 $y>1.4$,

$\because$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $y>1.4$ 时,$1<x<5$,

即 d 的取值范围为 $1<d<5$;

(3)12 个同学身高与小明相同,即 $y=1.4$,

由(2)可得,当 $y=1.4$ 时,

解得 $x_1=1$,$x_2=5$,

$\therefore$ 可以站立跳绳的距离为 $5-1=4$ 米,

$\because$ $4\div0.5=8$,

$\therefore$ 要使绳子超过头顶,最多站立 7 个人,

$\because$ $7<10$,

$\therefore$ 剩下的同学不能一起玩.

答:剩下的同学不能在 OD 之间一起玩跳大绳.

5. (2023 安徽预测卷)**【阅读理解】**

已知关于 x,y 的二次函数 $y=x^2-2ax+a^2+2a$,其图象的顶点坐标为$(a,2a)$,故不论 a 取何值时,对应的二次函数图象的顶点都在直线 $y=2x$ 上,我们称顶点位于同一条直线上且形状相同的抛物线为同源二次函数,该条直线为根函数.

【问题解决】

(1)若二次函数 $y=x^2+2x-3$ 和 $y=-x^2-4x-3$ 是同源二次函数,求它们的根函数;

(2)已知关于 x,y 的二次函数 $C:y=x^2-4mx+4m^2-4m+1$,完成下列问题:

①求满足二次函数 C 的所有二次函数的根函数;

②若二次函数 C 的图象与直线 $x=-3$ 交于点 P,求点 P 到 x 轴的最小距离,并求出此时 m 的值.

5. **解:**(1)$\because y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,

$\therefore$ 该二次函数图象的顶点坐标为$(-1,-4)$.

$\because y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$,

$\therefore$ 该二次函数图象的顶点坐标为$(-2,1)$.

设经过点$(-1,-4)$和点$(-2,1)$的直线的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

$\therefore \begin{cases}-k+b=-4\\-2k+b=1\end{cases}$,

解得$\begin{cases}k=-5\\b=-9\end{cases}$,

$\therefore$ 直线解析式为 $y=-5x-9$,

$\therefore$ 它们的根函数为直线 $y=-5x-9$;

(2)①$\because y=x^2-4mx+4m^2-4m+1=(x-2m)^2-4m+1$,

$\therefore$ 该二次函数图象的顶点坐标为$(2m,-4m+1)$,

设顶点$(2m,-4m+1)$在直线 $y=nx+1$ 上,

$\therefore -4m+1=2mn+1$,

解得 $n=-2$,

$\therefore$ 顶点$(2m,-4m+1)$在直线 $y=-2x+1$ 上,

$\therefore$ 满足二次函数 C 的所有二次函数的根函数为直线 $y=-2x+1$;

②$\because$ 二次函数 C 的图象与直线 $x=-3$ 交于点 P,

$\therefore$ 当 $x=-3$ 时,$y=(-3)^2-4m\times(-3)+4m^2-4m+1=4m^2+8m+10$,

$\therefore P(-3,4m^2+8m+10)$.

$\because 4m^2+8m+10=4(m+1)^2+6$,

$\therefore$ 当 $m=-1$ 时,点 P 的纵坐标的最小值为 6,

$\therefore$ 点 P 到 x 轴的最小距离为 6,此时 $m=-1$.

6. (**2023 安徽黑白卷**)定义:如果二次函数 y_1,y_2 满足 $y=k_1y_1+k_2y_2+c$(k_1,k_2,c 为常数)为正比例函数,则称 y_1,y_2 互为“变换函数”,k_1,k_2,c 为这两个函数的变换系数;

(1)写出 $y_1=-x^2+2x-3$ 的一个“变换函数”y_2,并求出一组对应的变换系数;

(2)若二次函数 $y_1=x^2+b_1x+c_1$ 的图象与 y 轴交于点(0,−3),将二次函数 $y_1=x^2+b_1x+c_1$ 的图象向左平移一个单位后得到一个新的二次函数 $y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$,且 y_1 与 y_2 互为“变换函数”,变换系数为 $k_1=1$,$k_2=-1$,$c=-1$,求 a_2,b_1,c_1 的值;

(3)已知二次函数 $y_1=x^2-6x+5$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(1,0)$,二次函数 $y_2=ax^2+bx+2m$ 的图象过 A 点,且 y_1 与 y_2 互为“变换函数”,变换系数为 $k_1=2$,$k_2=-1$,$c=m$,求 y_1-y_2+y 的最大值.

6. 解:(1)由题意得:$y_2=x^2+2x+3$,

$\therefore y=k_1y_1+k_2y_2+c=k_1(-x^2+2x-3)+k_2(x^2+2x+3)+c$,

$\because y$ 为正比例函数,

$\therefore \begin{cases} k_1=k_2 \\ c=0 \end{cases}$,

$\therefore$ 一组对应的变换系数为 1,1,0(答案不唯一);

(2)由题意得:$a_2=1$,

当 $x=0$ 时,$y_1=c_1=-3$,

$\because y_2=(x+1)^2+b_1(x+1)+c_1=x^2+(2+b_1)x+b_1-2$,

$\therefore y=y_1-y_2-1=x^2+b_1x-3-[x^2+(2+b_1)x+b_1-2]-1=-2x-b_1-2$,

$\because y=k_1y_1+k_2y_2+c$ 是正比例函数,

$\therefore -b_1-2=0$,即 $b_1=-2$,

$\therefore a_2=1, b_1=-2, c_1=-3$;

(3)$\because$ 二次函数 $y_2=ax^2+bx+2m$ 的图象过 $A(1,0)$,

$\therefore 0=a+b+2m$,即 $b=-a-2m$,

$\therefore y_2=ax^2-(a+2m)x+2m$,

$\because$ 变换系数为 $k_1=2, k_2=-1, c=m$,

$\therefore y=2y_1-y_2+m=2(x^2-6x+5)-[ax^2-(a+2m)x+2m]+m$

$=(2-a)x^2+(a+2m-12)x+10-m$,

$\because y=k_1y_1+k_2y_2+c$ 为正比例函数,

$\therefore \begin{cases}2-a=0\\10-m=0\\a+2m-12\neq0\end{cases}$,

解得$\begin{cases}a=2\\m=10\end{cases}$,

$\therefore b=-a-2m=-22$,

$\therefore y_2=2x^2-22x+20, y=10x$,

$\therefore y_1-y_2+y=x^2-6x+5-(2x^2-22x+20)+10x=-(x-13)^2+154$,

$\therefore y_1-y_2+y$ 在 $x=13$ 时取得最大值,最大值为 154.

7. (2023 甘肃预测卷)**【情境引入】**

在学习完角平分线上的点到角的两边距离相等后,小明对这一课题进一步探究如下:

(1)如图①,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,CD 是$\triangle ABC$ 的角平分线,$DE\perp BC$,$DF\perp AC$,垂足分别为点 E,F. 求证:四边形 $CEDF$ 是正方形;

【深入探究】

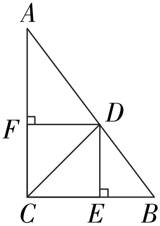
(2)如图②,在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=60°$,CD 平分$\angle ACB$,过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E,作 $DF\perp AC$ 于点 F,点 H 是 CD 的中点,连接 HE,FH.

①判断四边形 $DFHE$ 的形状，并说明理由；

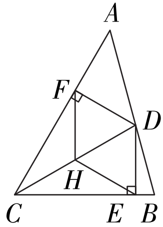
②已知 $CD=4\sqrt{2}$，$AF=2\sqrt{2}$，求 AB 的长；

【迁移应用】

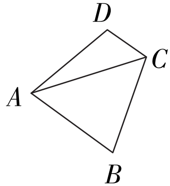
(3)如图③，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD+\angle BCD=180°$，连接 AC. 求证：CA 平分 $\angle DCB$.



图①



图②



图③

第 7 题图

7. (1)**证明**：$\because$ CD 平分 $\angle ACB$，$DE\perp BC$，$DF\perp AC$，

$\therefore$ $DE=DF$，$\angle DFC=90°$，$\angle DEC=90°$，

又$\because$ $\angle ACB=90°$，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是矩形，

$\because$ $DE=DF$，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是正方形；

(2)**解**：①四边形 $DFHE$ 为菱形.

理由如下：

$\because$ CD 平分 $\angle ACB$，

$\therefore$ $\angle HCE=\angle HCF=30°$，

$\because$ $DE\perp BC$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，

$\therefore$ $\angle DEC=\angle DFC=90°$，

$\therefore$ $\angle EDH=\angle FDH=60°$，

$\because$ H 是 CD 的中点，$\therefore$ $FH=EH=\frac{1}{2}CD=HD$，

$\therefore$ $\angle HFD=\angle FDH=\angle HDE=\angle HED=60°$，

$\therefore$ $\triangle DFH$ 和 $\triangle DEH$ 都为等边三角形，

$\therefore DF=DE=HF=HE$,

$\therefore$ 四边形 $DFHE$ 为菱形;

②$\because CD=4\sqrt{2}$,

$\therefore DF=\frac{1}{2}CD=2\sqrt{2}$,

$\because AF=2\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle AFD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AD=4, \angle B=75°$,

$\because \angle BCD=30°$,$\therefore \angle CDB=75°$,

$\therefore \triangle BCD$ 是等腰三角形,$\therefore BC=CD=4\sqrt{2}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中,$\because \angle DCE=30°$,

$\therefore CE=2\sqrt{6}$,$\therefore BE=BC-CE=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$,

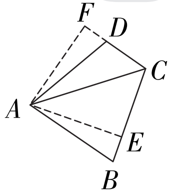
$\because$ 四边形 $DFHE$ 为菱形,

$\therefore DE=DF=2\sqrt{2}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中,由勾股定理,得 $BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=4\sqrt{3}-4$,

$\therefore AB=AD+BD=4\sqrt{3}$;

(3)**证明:**如解图,过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,作 $AF\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 F,



第 7 题解图

$\therefore \angle AEC=\angle AEB=\angle AFD=90°$,

$\therefore \angle EAF+\angle BCD=180°$,

$\because \angle BAD+\angle BCD=180°$,

$\therefore \angle BAD=\angle EAF$,$\therefore \angle FAD=\angle EAB$,

又$\because AB=AD$,$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADF$,

$\therefore AE=AF$,

$\because AE\perp BC$,$AF\perp FC$,

$\therefore CA$ 平分$\angle DCB$.

8. (2023 山西黑白卷)**综合与实践**

问题情境:

在综合实践课上,同学们以“图形的旋转”为主题开展数学活动,并给出矩形纸片 $ABCD$,$AD=2AB$.

实践操作:

第一步:如图①,将矩形纸片 $ABCD$ 对折,使得 DC 与 AB 重合,折痕为 EF,再将纸片展开;

第二步:如图②,将四边形 $EFCD$ 绕点 E 顺时针旋转 α($0°<\alpha<90°$),使得点 F 的对应点 F' 恰好落在四边形 $ABFE$ 对角线 BE 上,CF' 与 BF 交于点 G,连接 AF' 并延长与射线 EG 交于点 H.

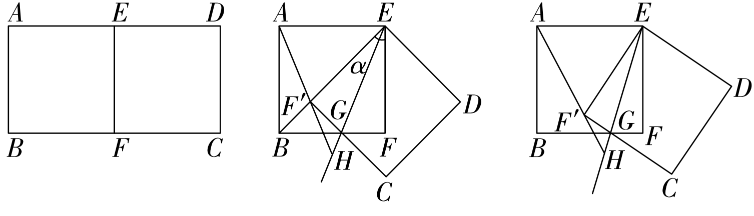
探究发现:

(1)在图①中,判断四边形 $ABFE$ 的形状,并说明理由;

(2)在图②中,此时旋转角 α 的度数为________°,$\angle AHE=$______°;

问题拓展:

(3)如图③,继续旋转四边形 $EFCD$,试探究在旋转过程中:



第 8 题图

①$\angle AHE$ 是否是一个定值？若是，请求出 $\angle AHE$ 的度数，若不是，请说明理由；

②请直接写出线段 AH，$F'H$，AB 之间满足的数量关系.

8. 解：(1)解法一：

四边形 $ABFE$ 为正方形，

理由如下：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore \angle A=\angle B=90°$，

由折叠的性质可得 $AE=DE=\frac{1}{2}AD$，$EF\perp AD$，

$\therefore AD=2AE$，$\angle AEF=90°$，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle AEF=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为矩形，

又$\because AD=2AB$，

$\therefore AB=AE$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为正方形；

解法二：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AB/\!/DC$，$AD/\!/BC$，

$\because$ 沿 EF 折叠后 DC 与 AB 重合，

$\therefore FE/\!/AB$，$AE=DE=\frac{1}{2}AD$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形，

$\because AD=2AB$，$\therefore AE=AB$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为菱形，

又$\because \angle A=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为正方形；

(2)45,45;

【解法提示】$\because$ 四边形 $ABFE$ 为正方形,BE 为对角线,$\therefore$ $\angle AEB=\angle BEF=45°$,$\because$ EF 的对应边为 EF',$\therefore$ 旋转角 $\alpha=\angle BEF=45°$.

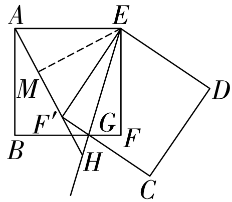
解法一:由题意可知,$AE=EF'=EF$,$\angle EF'G=\angle EFG=90°$,$\because$ $\angle AEF'=45°$,$\therefore$ $\angle EAF'=\angle EF'A=\dfrac{180°-\angle AEF'}{2}=67.5°$,在 $\mathrm{Rt}\triangle EF'G$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle EFG$ 中,$\because$ $\begin{cases}EF'=EF\\EG=EG\end{cases}$,$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle EF'G\cong\mathrm{Rt}\triangle EFG$,$\therefore$ $\angle F'EG=\angle FEG=\dfrac{1}{2}\angle BEF=22.5°$. $\because$ $\angle EF'A=\angle F'EH+\angle AHE$,$\therefore$ $\angle AHE=\angle EF'A-\angle F'EH=67.5°-22.5°=45°$.

解法二:$\because$ $AE=EF'=EF$,$\angle AEF'=45°$,$\therefore$ $\angle EAF'=\angle EF'A=\dfrac{180°-\angle AEF'}{2}=67.5°$,$\because$ $\angle BAE=90°$,$\therefore$ $\angle BAF'=90°-67.5°=22.5°$,在 $\mathrm{Rt}\triangle EF'G$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle EFG$ 中,$\because$ $\begin{cases}EF'=EF\\EG=EG\end{cases}$,$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle EF'G\cong\mathrm{Rt}\triangle EFG$,$\therefore$ $\angle F'EG=\angle FEG=\dfrac{1}{2}\angle F'EF=22.5°$,$\therefore$ $\angle BAF'=\angle F'EG$,又$\because$ $\angle AF'B=\angle EF'H$,$\therefore$ $\triangle AF'B\backsim\triangle EF'H$,$\therefore$ $\angle ABF'=\angle EHF'=45°$,即 $\angle AHE=45°$.

(3)①是,$\angle AHE=45°$;

解法一：

如解图①，过点 E 作 $EM\perp AH$ 于点 M，



第 8 题解图①

由题意知 $EF'=AE=EF$，$\angle EF'G=\angle EFG=90°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EF'G$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle EFG$ 中，$\because \begin{cases} EF'=EF \\ EG=EG \end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle EF'G\cong \mathrm{Rt}\triangle EFG$，

$\therefore \angle F'EG=\angle FEG$，

$\because AE=EF'$，$\therefore \triangle AEF'$为等腰三角形，

$\because EM\perp AH$，$\therefore \angle F'EM=\angle AEM$，

$\because \angle F'EG+\angle FEG+\angle F'EM+\angle AEM=\angle AEF=90°$，

$\therefore \angle F'EG+\angle F'EM=\angle FEG+\angle AEM=\dfrac{1}{2}\angle AEF=45°$，即 $\angle HEM=45°$，

$\therefore \angle AHE=90°-\angle HEM=45°$，

$\therefore \angle AHE$ 始终是一个定值，其度数为 $45°$；

解法二：

由旋转可知，$\angle F'EF=\alpha$，

$\therefore \angle AEF'=90°-\alpha$，

$\therefore \angle EAF' = \angle EF'A = \dfrac{180° - \angle AEF'}{2} = 45° + \dfrac{\alpha}{2}$,

在 Rt$\triangle EF'G$ 和 Rt$\triangle EFG$ 中,$\because \begin{cases} EF' = EF \\ EG = EG \end{cases}$,

$\therefore$ Rt$\triangle EF'G \cong$ Rt$\triangle EFG$,

$\therefore \angle F'EG = \angle FEG = \dfrac{1}{2}\angle F'EF = \dfrac{\alpha}{2}$,

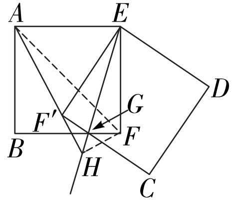
$\because \angle EF'A = \angle F'EH + \angle AHE$,

$\therefore \angle AHE = \angle EF'A - \angle F'EH = 45° + \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 45°$,

$\therefore \angle AHE$ 始终是一个定值,其度数为 45°;

②$AH^2 + F'H^2 = 2AB^2$.

【解法提示】如解图②,连接 AF,FH,易得 $\angle F'EH = \angle FEH$,$\because EF' = EF$,$EH = EH$,$\therefore \triangle F'EH \cong \triangle FEH$,$\therefore F'H = FH$,$\angle F'HE = \angle FHE$,由①得 $\angle AHE = 45°$,$\therefore \angle FHE = 45°$,$\therefore \angle AHF = \angle AHE + \angle FHE = 90°$,$\therefore \triangle AHF$ 为直角三角形,$\therefore AH^2 + FH^2 = AF^2$,$\because$ 四边形 $ABFE$ 为正方形,$\therefore AF = \sqrt{2}AB$,$\therefore AF^2 = 2AB^2$,$\therefore AH^2 + FH^2 = 2AB^2$,$\because FH = F'H$,$\therefore AH^2 + F'H^2 = 2AB^2$.



第 8 题解图②