题型一 二次函数的实际应用

1.【课本再现】

如图 1，有一座抛物线型拱桥，在正常水位时水面宽 $AB=20$m，当水位上升 3 m 时，水面宽 $CD=10$ m.

(1)按如图 1 所示的直角坐标系，求此抛物线的函数表达式；

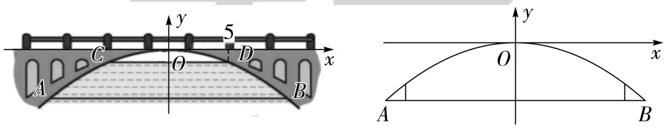
【问题拓展】

(2)当桥拱的最高点与水面的距离等于 2 m 时，达到警戒水位，水位警报器恰好发出警报，则当水面的宽度为多少时，水位警报器恰好发出警报？

(3)如图 2，若在该拱桥下方对称安置两个桥墩进行支撑，为保障船只正常通行，两个桥墩之间的距离需要 17 m，若桥下水位刚好在正常水位.

①求桥墩露出水面的高度(不考虑桥墩的宽度)；

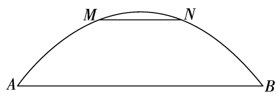
②若一只宽为 1.2 m 的打捞船径直向桥驶来，当船驶到桥拱下方且距左侧桥墩 0.9 m 时，有一名身高为 1.75 m 的工人站立在打捞船正中间清理垃圾，他的头顶是否会触碰到桥拱，请说明理由(假设船底与水面平齐).



图①　　　　图②

第 1 题图

2.根据以下素材，探索完成任务．

素材一：图16－1是一座拱桥，图16－2是其抛物线型桥拱的示意图，日常其水面宽$AB=30$ m，洪水期间，水位上涨8 m后，水面宽$MN=10$ m.	 第2题图①
素材二：为保证通航安全，货船在通过拱桥时，船顶离拱桥至少要留0.6 m的距离．当拱桥的最高点与水面的距离小于等于4 m时，达到警戒水位，水位警报器发出警报，此时禁止货船通行．	 第2题图②
问题解决	
任务一	请建立适当的平面直角坐标系，并求出抛物线的解析式；
任务二	求水位警报器恰好发出警报时水面的宽度；
任务三	距离拱桥96 km处有一艘货船以12 km/h的速度向拱桥径直驶来，该货船水面以上的宽为6 m，高为3 m，此时水位正好在AB处，之后水位每小时上涨0.6 m，如果该货船的速度不变，那么它能否安全通过此拱桥？并说明理由.

题型二 二次函数性质综合题

3.已知抛物线$y=ax^2-2ax+c$(a，c为常数，$a\neq0$)经过点$A(-1，0)$，与x轴另一个交点为B，交y轴于点C，

$D(-c，t)$为直线 $x=-c$ 上的动点．

(1)当 $a=1$ 时，求该抛物线的顶点坐标；

(2)当 $t=a$，$CD=AB$ 时，求该抛物线的解析式；

(3)当 $a>0$ 时，抛物线的对称轴交 x 轴于点 E，连接 CE，过点 D 作 $DF\perp CE$ 交 y 轴于点 F，连接 CD 和 BF，若 $CD+BF$ 的最小值为 4，求点 D 和点 F 的坐标．

题型三 几何综合题

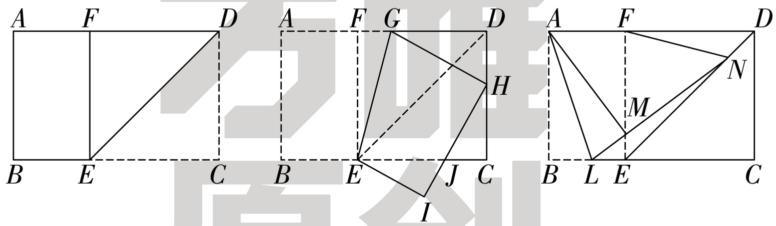
4.综合与实践

问题情境：数学活动课上，老师出示了一个问题：如图①，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 上，将矩形 $ABCD$ 沿 DE 所在的直线折叠，点 C 的对应点 F 恰好落在 AD 边上，求$\frac{DE}{CD}$ 的值．

独立思考：(1)请解答老师提出的问题；

实践探究：(2)希望小组受此问题的启发，将图①展开，然后将矩形 $ABCD$ 沿着 EG(点 G 在边 AD 上)所在直线折叠，点 A 的对应点 H 恰好落在 CD 边上，点 B 落在点 I 处，得到图②，设 HI 交 BC 于点 J，请判断线段 FG，GH，CH 之间的数量关系；

问题解决：(3)智慧小组突发奇想，将图①展开铺平，然后将矩形 $ABCD$ 沿着 AL(点 L 在边 BC 上)所在直线折叠，点 B 的对应点 M 恰好落在 EF 边上，延长 LM，交 DE 于点 N，连接 FN，得到图③，若 $AB=5$，$BC=8$，求线段 FN 的长．



图①　图②　图③

第 4 题图

5.综合与实践

特例感知

(1)在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，$AC=6$，$BD=8$.

①若四边形 $ABCD$ 是菱形，则四边形 $ABCD$ 的面积为________；

②如图 1，若对角线 $AC\perp BD$，则四边形 $ABCD$ 的面积为______；

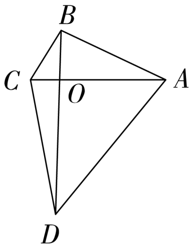
③如图 2，若 $\angle AOB=30°$， 则四边形 $ABCD$ 的面积为________；

类比探究

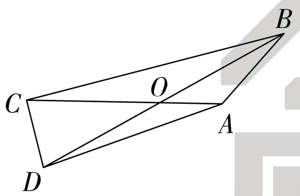
(2)若四边形 $ABCD$ 对角线 AC，BD 交于点 O，$AC=m$，$BD=n$, $\angle AOB=\alpha(0<\alpha\leqslant 90°)$, 求四边形 $ABCD$ 的面积(用 m，n，α表示)；

拓展应用

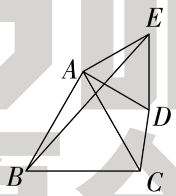
(3)如图 3，$\triangle ABC$ 和$\triangle AED$ 都是等边三角形，$AB=3$，$AE=2$, $\angle BAE=150°$， 连接 BE，CD，求四边形 $EBCD$ 的面积.



图①



图②



图③

第 5 题图

题型一 二次函数的实际应用

1. **解**：(1)设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2(a\neq0)$，桥拱最高点 O 到水面 CD 的距离为 h m，

则 $D(5，-h)$，$B(10，-h-3)$，

$\therefore\begin{cases}25a=-h\\100a=-h-3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{25}\\h=1\end{cases}$，

∴此抛物线的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{25}x^2$；

(2)∵当桥拱的最高点与水面的距离等于 2 m 时，达到警戒水位，水位警报器恰好发出警报，

∴令 $y=-2$，即 $-\dfrac{1}{25}x^2=-2$，

解得 $x=\pm5\sqrt{2}$，

∴此时水面宽为 $5\sqrt{2}-(-5\sqrt{2})=10\sqrt{2}$ m，

∴当水面的宽度为 $10\sqrt{2}$ m 时，水位警报器恰好发出警报；

(3)①∵两个桥墩之间的距离为 17 m，且对称安置，

∴桥墩距离 y 轴的距离为$\dfrac{17}{2}=8.5$ m.

令 $x=8.5$，

得 $y=-\dfrac{1}{25}\times8.5^2=-2.89$，

由(1)知，桥拱最高点 O 到水面 AB 的距离为 4 m，

∴桥墩露出水面的高度为 $4-2.89=1.11$ m；

②他的头顶不会触碰到桥拱，理由如下：

∵打捞船距左侧桥墩 0.9 m，打捞船宽 1.2 m，工人站立在打捞船正中间，

∴工人距左侧桥墩的距离为 $0.9+\dfrac{1}{2}\times1.2=1.5$ m，

此时 $x=-8.5+1.5=-7$，

∴将 $x=-7$ 代入 $y=-\dfrac{1}{25}x^2$，

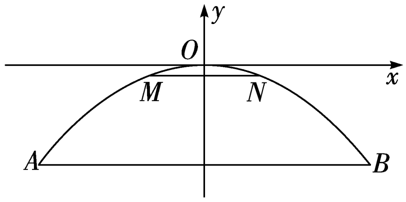
解得 $y=-1.96$，

∴工人头顶距桥拱的距离为 $4-1.96=2.04$ m，

∵2.04 m>1.75 m，

∴他的头顶不会触碰到桥拱．

2.解：任务一：建立平面直角坐标系如解图，



第 2 题解图

设抛物线的解析式为 $y=ax^2$，桥拱最高点 O 到水面 MN 的距离为 h m，

∵AB＝30 m，MN＝10 m，

∴N(5，－h)，B(15，－h－8)，

将点 N，B 代入 $y=ax^2$ 中，

得 $\begin{cases}25a=-h\\225a=-h-8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{25}\\h=1\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$；

任务二：∵当拱桥的最高点与水面的距离等于 4 m 时达到警戒水位，水位警报器恰好发出警报，

∴令 $y=-4$，即 $-\frac{1}{25}x^2=-4$，

解得 $x=\pm10$，

∴此时水面宽度为 $10-(-10)=20(m)$，

∴水位警报器恰好发出警报时，水面的宽度为 20 m；

任务三：该货船可以安全通过此拱桥．

理由：货船行驶到桥下的时间为 $96\div12=8(h)$，

∴水位上升的高度为 $0.6\times8=4.8(m)$，

∵由任务一可知，点 B 的坐标为(15，－9)，

∴船行驶到桥下时拱桥的最高点到水面的距离为 $9-4.8=4.2(m)$，

∵$4.2>4$，

∴货船此时可以通行，

又∵$x=3$ 时，$y=-\frac{1}{25}\times3^2=-\frac{9}{25}$，

∵$4.2-\frac{9}{25}-3=\frac{21}{25}>0.6$，

∴该货船可以安全通过此拱桥.

题型二 二次函数性质综合题

3.解：(1)∵$a=1$，

∴$y=x^2-2x+c$，

∵抛物线过点 $A(-1，0)$，

∴$0=1+2+c$，

∴$c=-3$，

∴$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴顶点坐标为$(1，-4)$；

(2)∵$y=ax^2-2ax+c$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

∵点 $A(-1，0)$，B 是抛物线与 x 轴的交点，

∴$\frac{-1+x_B}{2}=1$，

∴$x_B=3$，

∴$B(3，0)$，

∴$AB=3-(-1)=4$，

把点 $A(-1，0)$代入 $y=ax^2-2ax+c$ 中，

得 $0=a+2a+c$，

∴$c=-3a$，

∴$C(0，-3a)$，

∵$D(-c，t)$，$t=a$，

∴$D(3a，a)$，

∴$CD=\sqrt{(3a)^2+(a+3a)^2}=|5a|$，

∵$CD=AB=4$，

∴$|5a|=4$，

∴$a_1=\frac{4}{5}$，$a_2=-\frac{4}{5}$，

∴$c_1=-\frac{12}{5}$，$c_2=\frac{12}{5}$，

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{5}x-\frac{12}{5}$ 或 $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{8}{5}x+\frac{12}{5}$；

(3)由(2)知 $c=-3a$，$B(3，0)$，$C(0，-3a)$，

∵$D(-c，t)$，

∴$D(3a，t)$，

∵点 E 是抛物线的对称轴与 x 轴的交点，

∴$E(1，0)$，

如解图，过点 D 作 $DH\perp y$ 轴于点 H，则 $DH=OC=3a$，

∵$DF\perp CE$，$CO\perp OB$，

∴$\angle OCE+\angle OEC=90°$，$\angle OCE+\angle CFD=90°$，

∴$\angle OEC=\angle CFD$，

∵$\angle COE=\angle DHF=90°$，

∴$\triangle OCE\cong\triangle HDF(AAS)$，

∴$OE=HF=1$，

∴$F(0，t+1)$，

将线段 CD 平移，使点 D 和点 F 重合，则需将 CD 向左平移 $3a$ 个单位长度，向上平移 1 个单位长度，

∴C 的对应点 $C'(-3a，-3a+1)$，

∴$CD=C'F$，

∴$BF+CD=BF+C'F$，

当 $BF+CD$ 最小时，B，F，C'三点共线，

∵$BF+CD$ 的最小值为 4，

∴$BC'=4$，

∴$\sqrt{(3+3a)^2+(3a-1)^2}=4$，

解得 $a_1=-1$，$a_2=\frac{1}{3}$，

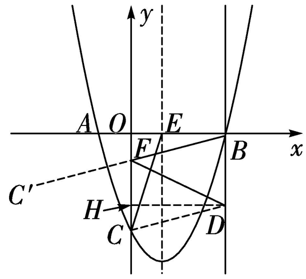
∵$a>0$，

∴$a=\frac{1}{3}$，

∴$C'(-1，0)$，

∵B，F，C'三点共线，且点 F 在 y 轴上，

∴$F(0，0)$，$D(1，-1)$.



第 3 题解图

题型三 几何综合题

4.解：(1)∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle C=\angle CDA=90°$，

∵将矩形 $ABCD$ 沿 DE 所在的直线折叠，点 C 的对应点 F 恰好落在 AD 边上，

∴$DF=DC$，$\angle DFE=\angle C=90°$，

∴$\angle DFE=\angle C=\angle CDA=90°$，

∴四边形 $CDFE$ 是矩形，

又∵$DF=DC$，

∴四边形 $CDFE$ 是正方形，

∴$\dfrac{DE}{CD}=\sqrt{2}$；

【一题多解】∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle C=\angle CDA=90°$，$AD\parallel BC$，

∵将矩形 $ABCD$ 沿 DE 所在的直线折叠，点 C 的对应点 F 恰好落在 AD 边上，

∴$DF=DC$，$EF=EC$，$\angle CDE=\angle FDE=\dfrac{1}{2}\angle CDA=\dfrac{1}{2}\times 90°=45°$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle CDE=\angle FDE=\angle CED=45°$，

∴$CE=CD$，

又∵$DF=DC$，$EF=EC$，

∴$DF=DC=EF=EC$，

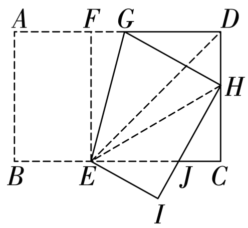
∴四边形 $CDFE$ 是菱形，

又∵$\angle C=90°$，

∴四边形 $CDFE$ 是正方形，

$\therefore \dfrac{DE}{CD}=\sqrt{2}$;

(2)如解图①，连接 EH，



第 4 题解图①

由折叠性质的得 $AG=GH$，

$\therefore GH=AF+FG$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle C=\angle B=90°$，$AB=CD$，

$\because$四边形 $CDFE$ 是正方形，

$\therefore CE=CD$，

由折叠性质的得 $HI=AB$，$\angle I=\angle B=90°$，

$\therefore HI=AB=CD=CE$，$\angle I=\angle B=\angle C=90°$，

在 Rt△IHE 与 Rt△CEH 中，

$\begin{cases} EH=HE, \\ IH=CE, \end{cases}$

$\therefore$Rt△IHE≌Rt△CEH(HL)，

$\therefore IE=CH$.

由折叠的性质可知 $BE=IE$，

$\therefore BE=CH$.

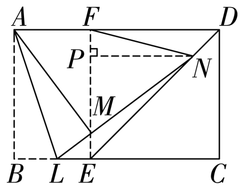
易知四边形 $ABEF$ 是矩形，

$\therefore AF=BE$，

$\therefore AF=CH$，

$\therefore GH=CH+FG$;

(3)如解图②，过点 N 作 $NP\perp EF$ 于点 P，



第 4 题解图②

$\therefore \angle NPM=\angle NPF=90°$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle C=\angle B=90°$，$AB=CD=5$，$AD=BC=8$.

$\because$四边形 $CDFE$ 是正方形，

$\therefore \angle CEF=\angle DFE=90°$，$EF=CD=DF=5$，$\angle PEN=45°$，

$\therefore \angle AFM=180°-\angle DFE=180°-90°=90°$，$\angle PNE=90°-\angle PEN=90°-45°=45°$，$AF=AD-DF=8-5=3$，$\therefore \angle FAM=90°-\angle FMA$，$PE=PN$.

由折叠性质得$\angle AML=\angle B=90°$，$AM=AB=5$，

$\therefore \angle AMN=180°-\angle AML=180°-90°=90°$，$FM=\sqrt{AM^2-AF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore \angle PMN=90°-\angle FMA$，$ME=EF-FM=5-4=1$.

$\because \angle FAM=90°-\angle FMA$，

$\therefore \angle PMN=\angle FAM$.

$\because \angle AFM=\angle NPM=90°$，

$\therefore \triangle AFM\backsim\triangle MPN$，

$\therefore \dfrac{AF}{MP}=\dfrac{FM}{PN}$.

$\because AF=3$，$FM=4$，

$\therefore \dfrac{MP}{PN}=\dfrac{3}{4}$.

设 $PM=3k$，$PE=PN=4k$.

$\because ME=PE-PM=1$，

$\therefore 4k-3k=1$，

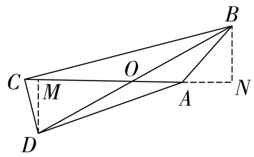
$\therefore k=1$，

$\therefore PE=PN=4$，

$\therefore PF=EF-PE=5-4=1$，

$\therefore$在 $Rt\triangle PFN$ 中，$FN=\sqrt{PN^2+PF^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$.

5.解：(1)①24；②24；③12；【解法提示】①根据菱形的面积公式得，$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times6\times8=24$；②$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BO+\frac{1}{2}AC\cdot DO=\frac{1}{2}AC\cdot BD=24$；③如解图①，过点 B 作 $BN\perp AC$ 交 CA 的延长线于点 N，过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M，则 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BN+\frac{1}{2}AC\cdot DM$.∵$BN=OB\cdot\sin30°$，$DM=OD\cdot\sin30°$，∴$BN+DM=(OB+OD)\cdot\sin30°=BD\cdot\sin30°$，∴$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin30°=12$.



第 5 题解图①

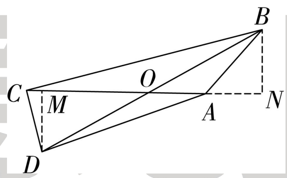
(2)如解图②，过点 B 作 $BN\perp AC$ 交 CA 的延长线于点 N，过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M，

则 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BN+\frac{1}{2}AC\cdot DM$，

∵$BN=OB\cdot\sin\alpha$，$DM=OD\cdot\sin\alpha$，

∴$BN+DM=(OB+OD)\cdot\sin\alpha=BD\cdot\sin\alpha$，

∴$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}mn\cdot\sin\alpha(0<\alpha\leqslant90°)$；



第 5 题解图②

(3)如解图③，连接 BD，CE 交于点 O，设 AC 与 BD 交于点 F，

∵$\triangle ABC$ 和$\triangle AED$ 都是等边三角形，

∴$AC=AB=3$，$AD=AE=2$，$\angle BAC=\angle DAE=60°$，

∴$\angle BAD=\angle CAE$，

∴$\triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$，

∴$BD=CE$, $\angle ABD=\angle ACE$.

∵$\angle AFB=\angle OFC$，

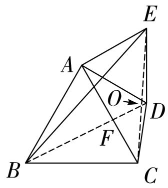
∴$\angle COF=\angle BAF=60°$.

∵$\angle BAE=150°$，

∴$\angle DAB=\angle BAE-\angle DAE=90°$，

∴$BD=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}=CE$,

∴由(2)可知，$S_{四边形EBCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CE\cdot\sin\angle BOC=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\sin 60°=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.



第 5 题解图③