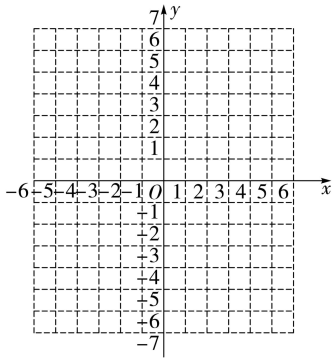
题型一　二次函数综合题

1. 在平面直角坐标系中，已知抛物线 L：$y=x^2-2mx+m^2-2$(m 为常数).

(1)求抛物线 L 的对称轴及顶点坐标(用含 m 的代数式表示)；

(2)当 m＝1 时，下表给出抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-2$ 的一些取值情况：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	4	…
y	…	7	2	−1	−2	−1	2	7	…



第 1 题图

①在图中描出表中的点，并用平滑的曲线依次连接各点，得到的图象记为 L'；

②若点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)在抛物线 L'上，且$-2<x_1<-1$，$1<x_2<2$，比较 y_1，y_2 的大小，并说明理由；

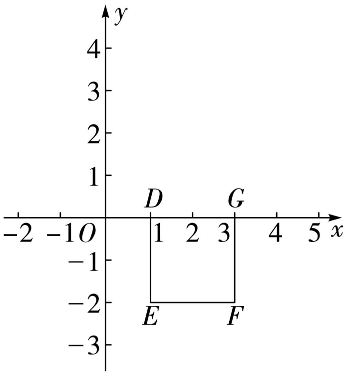
(3)直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 y 轴，x 轴分别交于 A，B 两点，当抛物线 L 与线段 AB 只有一个交点时，求 m 的取值范围.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=ax^2-4ax+1(a\neq0)$的图象与 y 轴交于点 A，点 B 与点 A 关于该二次函数图象的对称轴对称.

(1)写出二次函数图象的对称轴及点 B 的坐标；

(2)设该二次函数在 $-2\leq x\leq4$ 的最大值，最小值分别为 m，n 若 $m+n=0$，求 m，n 的值；

(3)如图，点 $D(1，0)$，$E(1，-2)$，$F(3，-2)$，$G(3，0)$，当二次函数 $y=ax^2-4ax+1$ 的图象与正方形 $DEFG$ 只有 2 个公共点时，求 a 的取值范围.

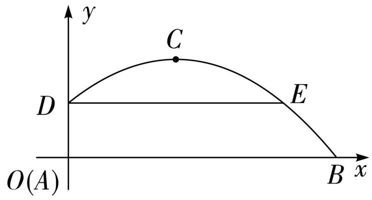


第 2 题图

3. 如图，是某蔬菜大棚的截面示意图，其形状可近似看作抛物线．其中大棚的跨径 AB＝10 m，顶端 C 点到保温墙 AD 的水平距离为 4 m，到地面 AB 的垂直距离为 3.6 m.

(1)求此抛物线型大棚的函数表达式；

(2)为方便灌溉，现要在保温墙顶端 D 的水平方向安装有多个喷水口的横杆 DE，求横杆 DE 的长．

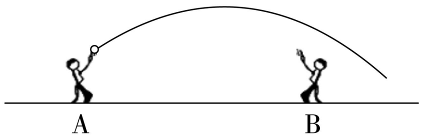


第 3 题图

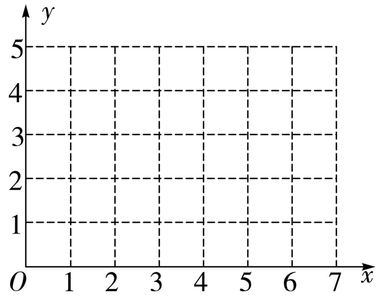
4. 如图①，小明与小刚在进行篮球训练，小明在 A 点处，小刚在 B 点处，两人相距 6 米，小明给小刚传球，篮球的飞行轨迹可看成抛物线．已知小明投出球时手离地面$\frac{20}{9}$ 米，篮球飞行的水平速度为 10 米/秒，篮球与小明的水平距离 x(单位：米)与离地高度 y(单位：米)的数据如下表(水平距离＝水平速度×时间)：

x/米	…	1	2.5	4	5.5	7	…
y/米	…	3	3.75	4	3.75	3	…

(1)在如图②所示的平面直角坐标系中，描出上述表格中各组数据对应的点并连线；



图①



图②

第 4 题图

(2)求 y 关于 x 的函数解析式；

(3)小刚在小明传球瞬间就作出接球反应，当小刚位于篮球正下方时，若篮球离地高度不大于小刚的最大接球高度，则视为接球成功．已知小刚面对篮球后退过程中速度为 2 米/秒，最大接球高度为$\frac{20}{9}$ 米；背对篮球向正前方前进过程中速度为$\frac{30}{9}$ 米/秒．

①若小刚选择面对篮球后退，能否成功接球？试计算并加以说明；

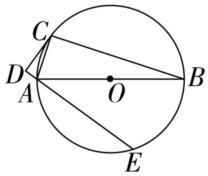
②若小刚背对篮球向正前方前进并成功接球，求小刚此时的最大接球高度．

题型二　与圆有关的证明与计算

5. 如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，$\angle ACB=90°$，CD 是⊙O 的切线，过点 A 作 CD 的垂线，交 CD 于点 D，延长 DA，交⊙O 于点 E.

(1)求证：AC 平分$\angle DAB$；

(2)若 $AD=1$，$CD=3$，求 ED 的长.



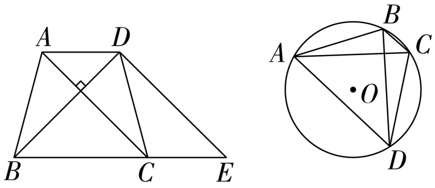
第 5 题图

6. 定义：对角线相等且互相垂直的四边形叫做“等垂四边形”，根据等垂四边形对角线互相垂直的特征可得等垂四边形的一个重要性质：等垂四边形的面积等于两条对角线乘积的一半.

(1)写出一个已学过的特殊四边形中是等垂四边形的是________；

(2)如图①，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AC\perp BD$，过点 D 作 $DE\parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E，且 $\angle DBC=45°$.求证：四边形 $ABCD$ 是等垂四边形；

(3)如图②，已知⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 是等垂四边形，若四边形 $ABCD$ 的面积为 12，$\angle ABC=120°$，求⊙O 的半径.



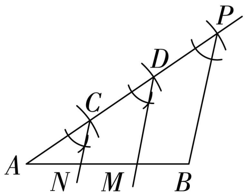
图①　　图②

第 6 题图

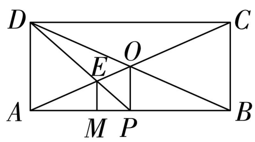
题型三　阅读理解

7. 下面是某数学兴趣小组探究用不同方法作一条线段的三等分点的讨论片段，请仔细阅读，并完成相应的任务.

小亮：如图①，作任意射线 AP(与 AB 不重合)，以点 A 为圆心，任意长为半径画弧交射线 AP 于点 C，以点 C 为圆心，AC 长为半径画弧交射线 AP 于点 D，再以点 D 为圆心，CD 长为半径画弧交射线 AP 于点 P，连接 BP，分别过点 D，C 作 BP 的平行线，交线段 AB 于点 M，N，则点 M，N 为线段 AB 的三等分点；



图①



图②

第 7 题图

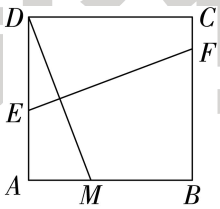
小军：(隐去作图痕迹)如图②，以 AB 为边构造矩形 $ABCD$，连接对角线 AC，BD 交于点 O，过点 O 作 $OP\perp AB$ 于点 P，连接 DP 交 AC 于点 E，过点 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M，则点 M 是线段 AB 的一个三等分点.

任务：

(1)小亮作图得到三等分点的依据是______；

(2)小军作图得到的点 M 是线段 AB 的三等分点吗？请判断并说明理由；

(3)如图③，以 AB 为边作正方形 $ABCD$，点 M 是 AB 边上的一个三等分点，连接 DM，作 DM 的垂直平分线分别交 AD，BC 于点 E，F，若 $AB=6$，请直接写出 EF 的长.



第 7 题图③

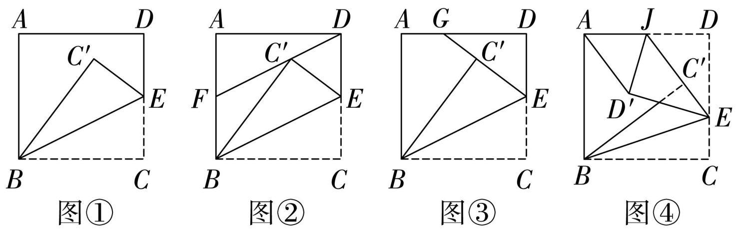
题型四　综合与实践

8. 折叠类操作型

【问题情境】在数学活动课上，小方、小刘和小王以三人小组的形式对正方形中的折叠问题进行探究．正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 6，如图①，E 为 CD 边上的一点，连接 BE，将△BCE 沿 BE 折叠，点 C 的对应点为点 C'.

【初步探究】(1)如图②，若点 E 为 CD 的中点，小方通过连接并延长 DC'交 AB 于点 F，得出四边形 $BEDF$. 试探究四边形 $BEDF$ 的形状，并加以证明；

【深入探究】(2)如图③，若点 E 为 CD 的中点，小刘延长 EC'交 AD 于点 G，试猜想 AG 与 DG 的数量关系，并加以证明；

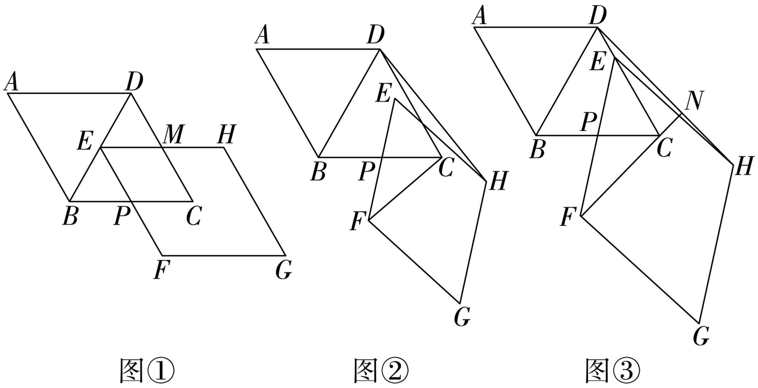


第 8 题图

【拓展延伸】(3)如图④，小王在小刘思路的启发下提出，连接 BE，将△BCE 沿 BE 折叠，点 C 的对应点为点 C'.再延长 EC'交 AD 于点 J，将△EDJ 沿 EJ 折叠，点 D 的对应点为点 D'.若 $AD'\parallel EJ$，求线段 CE 的长．

9. 综合与实践

【问题情境】在数学活动课上，老师让同学们以“菱形的旋转”为主题开展活动．已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 均为菱形，$AB=4$，$\angle A=\angle G=60°$，连接 BD，点 P 为 BC 的中点，EF 经过点 P，且 $EP=FP$，将菱形 $EFGH$ 绕点 P 顺时针旋转．



第 9 题图

【问题解决】

(1)如图①，在菱形 $EFGH$ 旋转的过程中，当点 E 落在 BD 的中点上时，EH 交 DC 于点 M，试猜想四边形 $EPCM$ 的形状，并加以证明；

(2)如图②，保持(1)中菱形 $EFGH$ 大小不变，继续顺时针旋转，分别连接 DH，FC，求证：$FC\perp DH$；

(3)如图③，若菱形 $EFGH$ 的顶点 E 落在 DC 边上，连接 DH，连接 FC 并延长交 DH 于点 N，当$\angle FCB=45°$时，求 CN 的长．

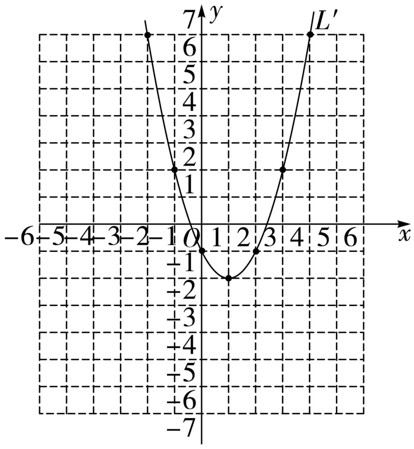
参考答案及解析

题型一　二次函数综合题

1. 解：(1)∵抛物线 L：$y=x^2-2mx+m^2-2=(x-m)^2-2$，

∴抛物线 L 的对称轴为直线 $x=m$，顶点坐标为$(m，-2)$；

(2)①如解图，抛物线 L'即为所求；



第 1 题解图

②$y_1>y_2$，理由如下：

∵$m=1$，

∴$y=x^2-2x-1$，抛物线 L'的对称轴为直线 $x=1$.

∵$1>0$，∴抛物线 L'上的点离对称轴的距离越远，对应的函数值越大，

∵$-2<x_1<-1$，$1<x_2<2$，

∴点$(x_1，y_1)$离对称轴的距离比点$(x_2，y_2)$离对称轴的距离远，

∴$y_1>y_2$；

(3)∵直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 y 轴，x 轴分别交于 A，B 两点，

∴令 $x=0$，得 $y=2$；令 $y=0$，得 $x=4$，

∴$A(0，2)$，$B(4，0)$.

分三种情况讨论：

①当抛物线 L 过点 A 时，可得 $m^2-2=2$，

解得 $m=2$ 或 $m=-2$，

当 $m=2$ 时，抛物线 L 的解析式为 $y=x^2-4x+2$，

令 $x^2-4x+2=-\frac{1}{2}x+2$，

解得 $x_1=0$ 或 $x_2=\frac{7}{2}$.

∵$x_2=\frac{7}{2}<4$，

∴抛物线 L 与线段 AB 有两个交点，

当 $m=-2$ 时，同理可得，$x_3=0$ 或 $x_4=-\frac{9}{2}$ (负值舍去)，

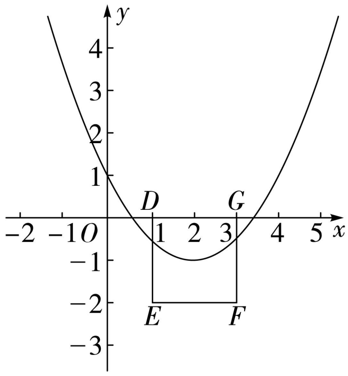
∴m 的取值范围是$-2\le m<2$；

②当抛物线 L 过点 B 时，可得$(4-m)^2-2=0$，
解得 $m=4+\sqrt{2}$ 或 $m=4-\sqrt{2}$ ，
当 $m=4-\sqrt{2}$ 时，抛物线的解析式为 $y=(x-4+\sqrt{2})^2-2$，抛物线的右支过点 B，
将 $x=0$ 代入得，$y=16-8\sqrt{2}>2$，
∴此时抛物线的左支与线段 AB 相交，
∴抛物线 L 与线段 AB 有两个交点，
当 $m=4+\sqrt{2}$ 时，抛物线的左支过点 B，抛物线 L 与线段 AB 只有一个交点，
∴m 的取值范围是 $4-\sqrt{2}<m\le 4+\sqrt{2}$ ；
③当直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ 与抛物线 L 的交点为抛物线 L 顶点时，
∵抛物线 L 的顶点坐标为$(m，-2)$，
∴此时与线段 AB 没有交点.
综上所述，m 的取值范围为$-2\le m<2$ 或 $4-\sqrt{2}<m\le 4+\sqrt{2}$.

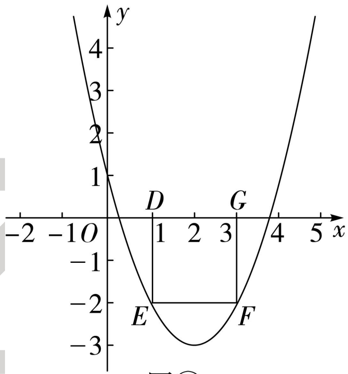
2. **解**：(1)将 $x=0$ 代入 $y=ax^2-4ax+1$ 得，$y=1$，
∴点 A 的坐标为$(0，1)$，
∵二次函数图象的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$，
∴点 B 的坐标为$(4，1)$；
(2)设二次函数 $y=ax^2-4ax+1$ 的顶点为点 C，则点 C 坐标为$(2，1-4a)$，
当 $a>0$ 时，二次函数的图象开口向上，
若$-2\le x\le 4$，则二次函数的最大值为在 $x=-2$ 时取得，
∴$m=(-2)^2\cdot a-4a\cdot(-2)+1=12a+1$，
最小值为 $n=1-4a$，
∵$m+n=0$，
∴$12a+1+1-4a=0$，
解得 $a=-\dfrac{1}{4}$ (舍去)；
当 $a<0$ 时，二次函数的图象开口向下，
若$-2\le x\le 4$，则二次函数的最小值为在 $x=-2$ 时取得，
∴$n=(-2)^2\cdot a-4a\cdot(-2)+1=12a+1$，
最大值为 $m=1-4a$，
∵$m+n=0$，
∴$1-4a+12a+1=0$，
解得 $a=-\dfrac{1}{4}$ ，
∴$m=2$，$n=-2$；
(3)∵二次函数 $y=ax^2-4ax+1$ 的图象经过点 $A(0，1)$，$B(4，1)$，对称轴为直线 $x=2$，
∴当 $a<0$ 时，可知二次函数 $y=ax^2-4ax+1$ 的图象与正方形 $DEFG$ 的边无交点；
当 $a>0$ 时，二次函数的图象开口向上，顶点 C 的坐标 C 为$(2，1-4a)$，随着 a 的增大，顶点 C 向下移动.
∴分两种情况讨论：
①如解图①，当顶点 C 在线段 DG 的下方，线段 EF 的上方时，此时存在两个公共点，
则$\begin{cases}1-4a<0\\1-4a>-2\end{cases}$，解得$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{3}{4}$ ；

②如解图②，当顶点 C 在线段 EF 的下方，且点 E，F 恰好在二次函数图象上时，此时存在两个公共点，则将点 $E(1，-2)$代入 $y=ax^2-4ax+1$ 中，得 $a-4a+1=-2$，解得 $a=1$.

综上所述，a 的取值范围为$\frac{1}{4}<a<\frac{3}{4}$ 或 $a=1$.



图①



图②

第 2 题解图

3. **解：**(1)由题意，得 $B(10，0)$，顶点 $C(4，3.6)$，

∴可设抛物线型大棚的函数表达式为 $y=a(x-4)^2+3.6(a\neq0)$，将点 $B(10，0)$代入，得 $a(10-4)^2+3.6=0$，

解得 $a=-\frac{1}{10}$，

∴抛物线型大棚的函数表达式为 $y=-\frac{1}{10}(x-4)^2+3.6$；

(2)当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{10}\times(-4)^2+3.6=2$，

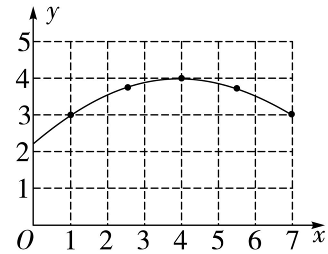
∴$D(0，2)$，由题意可知，$DE\parallel AB$，

∴点 D 与点 E 关于抛物线对称轴对称，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=4$，∴$E(8，2)$，

∴横杆 DE 的长为 8 m.

4. **解**：(1)描点、连线如解图；



第 4 题解图

(2)由题知，抛物线与 y 轴交点为$(0，\frac{20}{9})$，

∴设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+\frac{20}{9}$，

由表格得抛物线对称轴为直线 $x=4$，过点(1，3)，

∴$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=4\\3=a+b+\frac{20}{9}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{9}\\b=\frac{8}{9}\end{cases}$，

∴y 关于 x 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{20}{9}$；

(3)①不能成功接球，理由如下：

若小刚选择面对篮球后退，设 t 秒时，篮球位于小刚正上方，

则球飞行的水平距离为 $10t=6+2t$，解得 $t=0.75$，

∴$x=10\times0.75=7.5$，

∴$y=-\frac{1}{9}\times(7.5)^2+\frac{8}{9}\times7.5+\frac{20}{9}=\frac{95}{36}$，

∵$\frac{95}{36}>\frac{20}{9}$，

∴若小刚选择面对篮球后退，则不能成功接球；

②若小刚背对篮球向正前方前进并成功接球，设 t 秒时，篮球位于小刚正上方，

则有 $10t=6+\frac{30}{9}t$，解得 $t=\frac{9}{10}$，

∴$x=10\times\frac{9}{10}=9$，

代入 $y=-\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{20}{9}$ 可得，$y=\frac{11}{9}$，

∴小刚背对篮球向正前方前进并成功接球时，小刚的最大接球高度为$\frac{11}{9}$米.

题型二　与圆有关的证明与计算

5. (1)**证明**：如解图，连接 OC，

∵CD 是⊙O 的切线，∴$\angle DCO=90°$，

∴$\angle DCA+\angle ACO=90°$，

∵$CD\perp DE$，

∴$\angle CDA=90°$，

$\therefore \angle DCA+\angle DAC=90°$,

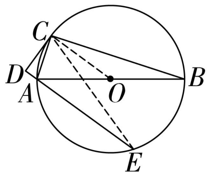
$\therefore \angle ACO=\angle DAC$,

$\because OA=OC$，$\therefore \angle OCA=\angle OAC$,

$\therefore \angle DAC=\angle OAC$,

$\therefore AC$ 平分 $\angle DAB$;

(2)**解**：如解图，连接 CE，



第 5 题解图

$\because CD$ 是⊙O 的切线，则 $\angle DCA+\angle ACO=90°$,

$\because \angle ACB=\angle ACO+\angle OCB=90°$,

$\therefore \angle DCA=\angle OCB=\angle ABC=\angle CED$.

$\because \angle CDA=\angle CDE=90°$,

$\therefore \triangle CDA\backsim\triangle EDC$，$\therefore \dfrac{CD}{ED}=\dfrac{DA}{DC}$，即 $\dfrac{3}{DE}=\dfrac{1}{3}$,

解得 $ED=9$.

6. (1)**解**：正方形；

(2)**证明**：$\because AC/\!/DE$，$AD/\!/BC$,

$\therefore$四边形 $ADEC$ 是平行四边形，

$\therefore AC=DE$,

$\because AC/\!/DE$,

$\therefore \angle DCA=\angle CDE$,

又$\because BD\perp AC$,

$\therefore \angle DCA+\angle CDB=90°$,

$\therefore \angle CDE+\angle CDB=90°$，即 $\angle BDE=90°$.

又$\because \angle DBC=45°$,

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰直角三角形，

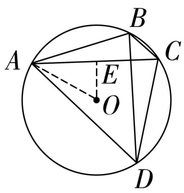
$\therefore BD=DE$,

$\therefore BD=AC$.

又$\because BD\perp AC$,

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是等垂四边形；

(3)**解**：如解图，过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E，连接 OA，



第 6 题解图

$\because$四边形 $ABCD$ 是等垂四边形，

$\therefore AC=BD$.

又$\because$等垂四边形的面积是 12，

$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot BD=12$，

解得 $AC=BD=2\sqrt{6}$.

又$\because \angle ABC=120°$，

$\therefore \angle ADC=60°$，

$\therefore \angle AOE=60°$，

设$\odot O$ 的半径为 r，根据垂径定理可得：

在$\triangle OAE$ 中，$OA=r$，$AE=\sqrt{6}$ ，

$\therefore r=\frac{AE}{\sin 60°}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径为 $2\sqrt{2}$.

题型三　阅读理解

7. **解**：(1)平行线分线段成比例；

(2)小军作图得到的点 M 是线段 AB 的三等分点，

理由如下：

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore DA\perp AB$，点 O 是 BD 的中点，

$\because OP\perp AB$，$\therefore$点 P 是 AB 的中点，

$\therefore OP=\frac{1}{2}AD$，

$\because AD\parallel OP$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle OPE$，

$\therefore \frac{PE}{DE}=\frac{OP}{AD}=\frac{1}{2}$，$\frac{PE}{PD}=\frac{PE}{PE+DE}=\frac{1}{3}$

$\because EM\perp AB$，

$\therefore EM\parallel AD$，

$\therefore \triangle PME\backsim\triangle PAD$，

$\therefore \frac{PM}{PA}=\frac{PE}{PD}=\frac{1}{3}$，

$\therefore PM=\frac{1}{3}PA$，

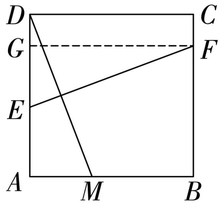
$\therefore AM=\frac{2}{3}AP=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{3}AB$，

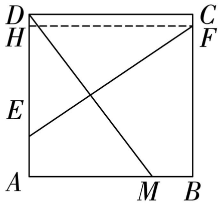
$\therefore$点 M 是线段 AB 的三等分点；

(3)EF 的长为 $2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{13}$.

【解法提示】如解图①，当 $AM=\frac{1}{3}AB=2$ 时，过点 F 作 $FG\perp AD$ 于点 G，则 $GF=AB=AD$，$\because EF\perp DM$，$\therefore \angle EDM+\angle DEF=\angle DEF+\angle GFE=90°$，$\therefore \angle ADM=\angle GFE$，$\therefore \triangle GEF\cong\triangle AMD$，$\therefore EF=DM$，在 Rt$\triangle DAM$ 中，$DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=2\sqrt{10}$ ；如解图②，当 $AM=\frac{2}{3}AB=4$ 时，过点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H，同理可得$\triangle HEF\cong\triangle AMD$，$\therefore EF=DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=2\sqrt{13}$.

综上所述，EF 的长为 $2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{13}$.


图①


图②

第 7 题解图

题型四　综合与实践

8. **解**：(1)四边形 $BEDF$ 为平行四边形．证明：

由折叠的性质得，$\angle CEB=\angle C'EB$，$CE=C'E$，

∵点 E 为 CD 的中点，

∴$CE=DE$，

∴$C'E=DE$，

∴$\angle EC'D=\angle EDC'$，

∵$\angle CEB+\angle C'EB+\angle C'ED=180°$，

$\angle C'ED+\angle EC'D+\angle EDC'=180°$，

∴$\angle CEB=\angle C'EB=\angle EC'D=\angle EDC'$，

∴$DF\parallel BE$，

又∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$AB\parallel CD$，

即 $BF\parallel DE$，

∴四边形 $BEDF$ 为平行四边形；

(2)$DG=2AG$，

证明如下：

如解图①，连接 BG，

由折叠的性质得，$BC=BC'$，$\angle BC'E=\angle C=90°$，

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$AB=BC=BC'$，$\angle A=\angle C=90°$，

∴$\angle A=\angle BC'G=90°$，$AB=BC'$，

在 Rt△ABG 和 Rt△$C'BG$ 中，

$\begin{cases} AB=C'B \\ BG=BG \end{cases}$，

∴Rt△ABG≌Rt△$C'BG$(HL)，

∴$AG=C'G$，

又∵$CE=C'E=\frac{1}{2}CD=3$，

∴设 $AG=C'G=x$，

则 $DG=6-x$，$DE=3$，

$GE=C'G+C'E=3+x$，

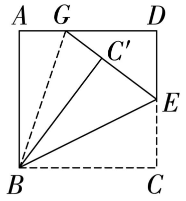
在 Rt△DGE 中，

由勾股定理得 $DG^2+DE^2=GE^2$，

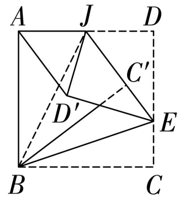
∴$(6-x)^2+3^2=(3+x)^2$，解得 $x=2$，

∴$AG=2$，$DG=6-2=4$，

$\therefore DG=2AG$；



第 8 题解图①



第 8 题解图②

(3)如解图②，连接 BJ，

$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB=BC=CD=AD=6$，$\angle ABC=\angle C=\angle D=90°$，

由折叠的性质得 $D'J=DJ$，$EC'=EC$，$\angle BC'E=\angle C=90°$，$\angle D'JE=\angle DJE$，$BC=BC'$，

$\therefore AB=BC'$，$\angle BC'J=180°-\angle BC'E=180°-90°=90°$，

在 Rt$\triangle ABJ$ 和 Rt$\triangle C'BJ$ 中，

$\begin{cases}BJ=BJ\\AB=C'B\end{cases}$，

$\therefore$Rt$\triangle ABJ\cong$Rt$\triangle C'BJ$(HL)，$\therefore AJ=C'J$，

$\because AD'\parallel EJ$，

$\therefore\angle JAD'=\angle DJE$，$\angle JD'A=\angle D'JE$，

又$\because\angle D'JE=\angle DJE$，

$\therefore\angle JAD'=\angle JD'A$，

$\therefore AJ=D'J$，

又$\because D'J=DJ$，$AJ=C'J$，

$\therefore C'J=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times6=3$，

设 $CE=C'E=a$，则 $DE=6-a$，$EJ=a+3$，

在 Rt$\triangle DEJ$ 中，由勾股定理得 $DJ^2+DE^2=EJ^2$，

$\therefore 3^2+(6-a)^2=(a+3)^2$，解得 $a=2$，

$\therefore CE=2$.

9. (1)**解**：四边形 $EPCM$ 为菱形，

证法一：

证明：$\because$四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 均为菱形，$\angle A=\angle G=60°$，

$\therefore\angle A=\angle C=60°$，$\angle FEH=\angle G=60°$，$\angle ABC=120°$，

$\because BD$ 为菱形 $ABCD$ 的对角线，

$\therefore\angle ABD=\angle DBC=60°$，

$\therefore\triangle BCD$ 为等边三角形，$BD=BC$，

$\because$点 P 为 BC 的中点，点 E 为 BD 的中点，

$\therefore BE=ED=\frac{1}{2}BD$，$BP=PC=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore BE=BP$，

$\because\angle DBC=60°$，$\therefore\triangle BEP$ 为等边三角形，

$\therefore\angle BPE=60°$，$\angle BPE=\angle FEH=\angle C$，

$\therefore EM\parallel BC$，$EP\parallel CM$，

$\therefore$四边形 $EPCM$ 为平行四边形，

又$\because PC=BP=PE$，

∴四边形 $EPCM$ 为菱形；

【难点点拨】证法一：利用菱形性质，先证四边形 $EPCM$ 为平行四边形，再利用 $PE=PC$，证明四边形 $EPCM$ 为菱形．

证法二：

证明：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle A=60°$，

∴$\angle C=\angle A=60°$，$BC=DC$，$\triangle BCD$ 为等边三角形，

∴$BD=BC$，$\angle DBC=\angle BDC=60°$，

∵点 P 为 BC 的中点，点 E 为 BD 的中点，

∴$BE=ED=\frac{1}{2}BD$，$BP=PC=\frac{1}{2}BC$，∴$BE=BP$，

∵$\angle DBC=60°$，

∴$\triangle BEP$ 为等边三角形，∴$\angle BEP=60°$，$BE=EP$，

∵四边形 $EFGH$ 为菱形，$\angle G=60°$，

∴$\angle FEH=\angle G=60°$，∴$\angle DEM=180°-\angle FEH-\angle BEP=60°$，

∴$\triangle DEM$ 为等边三角形，∴$DE=DM=EM$，

∵$DE=BE$，$BD=CD$，

∴$DM=CM$，∴$EP=PC=CM=ME$，

∴四边形 $EPCM$ 为菱形；

【难点点拨】证法二：先判定$\triangle BEP$ 和$\triangle DEM$ 均为等边三角形，再利用菱形的性质，通过四边都相等的四边形是菱形即可证明．

(2)**证明：**如解图①，连接 DP，HP，HF，并延长 FC 与 DH 交于点 Q，设 HP 与 FQ 交于点 R，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle A=\angle BCD=60°$，

∴$\triangle BCD$ 为等边三角形，

∵点 P 为 BC 的中点，

∴$DP\perp BC$，$\angle CDP=30°$，$\frac{CP}{DP}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

同理得 $HP\perp EF$，$\angle FHP=30°$，

∴$\frac{FP}{HP}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\frac{CP}{DP}=\frac{FP}{HP}$，

∵$\angle DPC+\angle CPH=\angle HPF+\angle CPH$，

∴$\angle DPH=\angle CPF$，

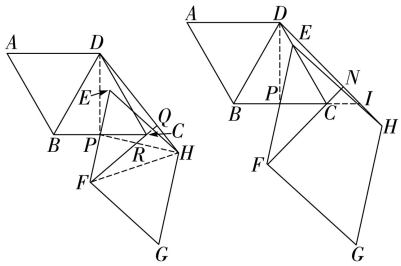
∴$\triangle DPH\backsim\triangle CPF$，

∴$\angle CFP=\angle DHP$，

又∵$\angle FRP=\angle HRQ$，

∴$\angle HPF=\angle FQH=90°$，∴$FQ\perp DH$；

∴$FC\perp DH$；



第 9 题解图

(3)解法一：

解：如解图②，连接DP，延长BC交DH于点I，

∵四边形$ABCD$为菱形，$\angle A=60°$，

∴$\triangle BCD$为等边三角形，

∵点P为BC的中点，

∴$DP\perp BC$，$\angle CDP=30°$，$BP=PC=2$，

∴$DP=\sqrt{3}\ CP=2\sqrt{3}$，

由(2)类比可得$FN\perp DH$，∴$\angle CNH=90°$，

∵$\angle FCB=45°$，∴$\angle NCI=45°$，

∴$\triangle NCI$为等腰直角三角形，

∴$\angle NIC=45°$，

∴$\triangle DPI$为等腰直角三角形，

∴$DP=PI=2\sqrt{3}$，∴$CI=PI-PC=2\sqrt{3}-2$，

∴$CN=NI=\frac{\sqrt{2}}{2}CI=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2\sqrt{3}-2)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$．

【难点点拨】解法一：连接DP，延长BC交DH于点I，利用$FN\perp DH$，$\angle FCB=45°$得出$\triangle NCI$与$\triangle DPI$都为等腰直角三角形，得出CI的长，利用等腰直角三角形边角关系即可求得CN的长．

解法二：

解：如解图③，连接DP，PN，过点P作$PK\perp FN$于点K，

∵点P为BC的中点，$AB=BC=4$，

∴$BP=CP=2$，

∵$\angle FCB=45°$，$PK\perp FN$，

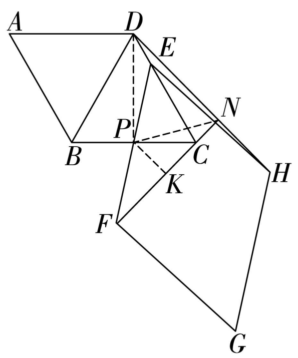
∴$\triangle PCK$为等腰直角三角形，∴$PK=CK=\frac{\sqrt{2}}{2}CP=\sqrt{2}$，

由(2)类比可得$FN\perp DH$，$DP\perp BC$，$\angle PDC=30°$，∴D，P，C，N四点共圆，∴$\angle PNF=30°$，

∵$\angle PKC=90°$，∴$NK=\sqrt{3}\ PK=\sqrt{6}$，

∴$CN=NK-CK=\sqrt{6}-\sqrt{2}$．

【难点点拨】解法二：连接DP，PN，过点P作$PK\perp FN$于点K，利用$FN\perp DH$，$DP\perp BC$，判定D，P，C，N四点共圆，得出$\angle PNF=30°$，利用含$30°$的直角三角形的边角关系，得出NK的长，进而求得CN的长．



第9题解图③